

ოპტიმალური მართვის ამოცანა კონტაქტური ამოცანისთვის (არალოკალური  
სასაზღვრო პირობებით)

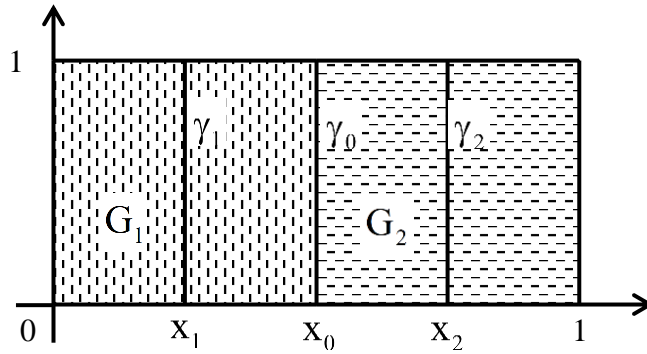
**Задача оптимального управления для одной контактной задачи  
с нелокальными краевыми условиями**

В работе рассматривается задача оптимального управления для распределённой системы, описываемой эллиптическим дифференциальным уравнением в частных производных с нелокальными контактными краевыми условиями. Формулируется линейная задача оптимального управления с интегральным функционалом качества для указанного класса нелокальных краевых задач. Для контактной нелокальной краевой задачи получена необходимая и достаточная условия оптимальности. На основе установленных условий оптимальности можно сформулировать численный алгоритм решения задачи оптимального управления.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании задач, в которых существенную роль играют нелокальные эффекты и контактные взаимодействия, в частности в механике сплошных сред и теории диффузионных процессов.

### 1. Постановка задачи оптимального управления.

Пусть область  $\bar{G}$  прямоугольник,  $\bar{G} = [0,1] \times [0,1]$ ,  $\Gamma$  - граница области  $G$ ,  $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$ ,  $\gamma_1 = \{(x_1, y): 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $\gamma_0 = \{(x_0, y): 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $\gamma_2 = \{(x_2, y): 0 \leq y \leq 1\}$ .  $\gamma_0$  делит область  $G$  на две подобласти  $G_1$  и  $G_2$ , а границу  $\Gamma$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  частей так, что



$$G = G_1 \cup G_2 \cup \gamma_0, \quad \bar{G}_1 = G_1 \cup \Gamma_1 \cup \gamma_0, \quad \bar{G}_2 = G_2 \cup \Gamma_2 \cup \gamma_0.$$

Пусть  $U$  произвольное ограниченное множество из  $\mathbb{R}$ , каждую функцию  $\omega(x, y): G \rightarrow U$  будем называть управлением. Множество  $U$  называется областью управления. Функцию  $\omega(x, y)$  назовем допустимым управлением, если  $\omega(x, y) \in L_2(G)$ . Через  $\Omega$  обозначим множество всех допустимых управлений.

Пусть  $a(x, y), b(x, y), c(x, y), d(x, y) \in L_2(\bar{G})$ ,  $\varphi_i(x, y) \in L_2(\bar{G})$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varphi_0(x, y) \in L_2(\bar{G})$ ,  $0 \leq q(x, y) \in L_\infty(\bar{G})$ . Для каждого фиксированного  $\omega(x, y) \in \Omega$ , в области  $\bar{G}$  рассмотрим следующую нелокальную контактную краевую задачу для уравнений Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - q(x, y)u_i = a(x, y)\omega(x, y) + b(x, y), \quad (x, y) \in G_i, \quad (1.1)$$

$$u_i(x, y) = \varphi_i(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_i, \quad (1.2)$$

$$u_1(x, y) = u_2(x, y), \quad (x, y) \in \gamma_0, \quad (1.3)$$

$$u(x_0, y) = \sigma_1 u_1(x_1, y) + \sigma_2 u_2(x_2, y) + \varphi_0(x_0, y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (1.4)$$

$$\text{где } \sigma_1 = \text{const} \geq 0, \quad \sigma_2 = \text{const} \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \leq 1, \quad u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \bar{G}_1, \\ u_0(x, y), & (x, y) \in \gamma_0, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \bar{G}_2. \end{cases}$$

задача (1.1) имеет единственное решение и принадлежит пространству  $W_2^2(G_1) \cap W_2^1(\bar{G}_1)$ .

Рассмотрим функционал

$$I(u) = \iint_G [c(x, y)u(x, y) + d(x, y)\omega(x, y)] dx dy, \quad (1.5)$$

и поставим следующую задачу оптимального управления: Найти функцию  $\omega^0(x, y) \in \Omega$ , при которой решение краевой задачи (1.1)-(1.4) придает функционалу (1.5) минимальное значение. Функцию  $\omega^0(x, y) \in \Omega$  назовем оптимальным управлением, а соответствующее решение  $u^0(x, y)$  - оптимальным решением.

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть  $\psi^0$  - решение сопряженной задачи,

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \psi_1(x, y), & (x, y) \in \overline{G_1}, \\ \psi_0(x, y), & (x, y) \in \gamma_0, \\ \psi_2(x, y), & (x, y) \in \overline{G_2}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} - q(x, y)\psi_i = -c(x, y), \quad (x, y) \in G_i \setminus \gamma_i, \quad i=1, 2$$

$$\psi_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_i, \quad i=1, 2$$

$$\psi_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma_0,$$

$$\frac{\partial \psi_1(x_1^+, y)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1(x_1^-, y)}{\partial x} = \sigma_1 \left[ \frac{\partial \psi_1(x_0^-, y)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2(x_0^+, y)}{\partial x} \right], \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$\frac{\partial \psi_2(x_2^+, y)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2(x_2^-, y)}{\partial x} = \sigma_2 \left[ \frac{\partial \psi_1(x_0^-, y)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2(x_0^+, y)}{\partial x} \right], \quad 0 \leq y \leq 1,$$

тогда для оптимальности  $(u^0, \omega^0)$  необходимо и достаточно выполнение принципа минимума

$$\inf_{\omega \in U} [d(x, y) - a(x, y)\psi^0(x, y)]\omega = [d(x, y) - a(x, y)\psi^0(x, y)]\omega^0$$

почти всюду на  $G$ .