ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ფიზიკა–მათემატიკის და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტი

ვახტანგ ბერიძე

„არალოკალური სასაზღვრო პირობების მქონე დიფერენციალური განტოლებებისათვის ოპტიმალური მართვის ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი რიცხვითი ალგორითმი“

დისერტაცია

(ინფორმატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად)

მეცნიერ-ხელმძღვანელი:

სრული პროფესორი დავით დევაძე

ბათუმი

2013

სარჩევი

შესავალი

1. თემის აქტუალობა

არალოკალური სასაზღვრო ამოცანები წარმოადგენენ კლასიკური ამოცანების ერთობ საინტერესო განზოგადოებას და ამავდროულად ისინი ბუნებრივი სახით მიიღებიან რეალური პროცესებისა და მოვლენების მათემატიკური მოდელების აგებისას ფიზიკაში, ინჟინერიაში, ეკოლოგიაში, სოციოლოგიაში და სხვა დარგებში [29], [57], [58], [65], [69], [70], [103]. პრაქტიკულად საჭირო მრავალი ამოცანის ამოხსნა, რომლებიც დაკავშირებულია ლაზერის გამოსხივების პროცესებისა და ტურბოლენტურ პლაზმაში დიფუზიური პროცესების მოდელირებასთან, მიდის არალოკალურ სასაზღვრო პირობებთან. საკმაოდ ხშირად გვხდება არალოკალური სასაზღვრო ამოცანები მათემატიკურ ბიოლოგიაშიც. კერძოდ, ასეთი ამოცანები მიიღება ბიოლოგიურ რეაქტორში მიკრობების პოპულაციის გამრავლების პროცესების მოდელირებისას.

ერთგანზომლებიან შემთხვევაში ცნობილი მრავალწერტილოვანი ამოცანები ფაქტიურად წარმოადგენენ ამოცანებს არალოკალური სასაზღვრო პირობებით ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის და მათ გამოკვლევას აქვს საკმაოდ დიდი ისტორია. რაც შეეხება მრავალგანზომილებიან არალოკალურ ამოცანებს და მათთან დაკავშირებულ გამოკვლევებს, ისინი სამეცნიერო ლიტერატურაში გაჩნდა წინა საუკუნის დასაწყისში. აქ პირველ რიგში შეიძლება დავასახელოთ ტ. კარლმანის (T.Carlman), ა. ბილსის (A.Beals), ფ. ბრაუდერის (F.E.Browder) და სხვების შრომები. [5], [12], [14] ნაშრომებში დასმული ამოცანები თავისთავად წარმოადგენს ამოცანებს არალოკალური სასაზღვრო პირობებით, რომლებიც განხილულია მხოლოდ დიფერენციალური ოპერატორის განსაზღვრის არის საზღვარზე. ზემოთ მითითებულ შრომებში დასმულ და გამოკვლეულ არალოკალურ ამოცანებს და მათ მოდიფიკაციებს ვუწოდებთ კლასიკურ არალოკალურ ამოცანებს.

1963 წელს გამოჩნდა ქენონის (J.R. Cannon) ნაშრომი (“The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, Quart.Aappl. Math.21, 1963, pp.155-160),

რომელშიც განხილული იყო არალოკალური ამოცანა. ამ ამოცანამ დასაბამი მისცა არალოკალური ამოცანების და მათი რიცხვითი ამოხსნის პრობლემების კვლევის ახალ მიმართულებებს [2], [10], [11], [51], [53], [56], [63].

1969 წელს გამოვიდა ბიწაძისა და სამარსკის ნაშრომი „წრფივი ელიფსური სასაზღვრო ამოცანის ერთი განზოგადოებული ამონახსნის შესახებ" [73], რომელიც ეხება ახალი ტიპის არალოკალური ამოცანების ამოხსნას. ნაშრომში ამოცანა დასმულია ზოგადი სახით, მაგრამ ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა დამტკიცებულია ლაპლასის განტოლებისათვის. ამ ნაშრომმა სტიმული მისცა საინტერესო და ორიგინალური სტატიების გამოჩენას [34], [66].

ბიწაძე–სამარსკის არალოკალური ამოცანების და მათი სხვადასხვა განზოგა-დოებების ინტენსიური გამოკვლევა დაიწყო წინა საუკუნის 80–იან წლებში [15], [34], [35], [41]-[48], [66], [68], [80], [91], [92], [105], [116], [117]. ბიწაძე–სამარსკის [73] არალოკალური სასაზღვრო ამოცანები ასევე მიიღება პლაზმური ფიზიკის პროცე-სების მათემატიკური მოდელირებისას. შეიძლება მივუთითოთ სხვა სფეროებიც, სადაც ის პოულობს მნიშვნელოვან გამოყენებას, მაგალითად, ბაროკლინური ზღვის გამოკვლევისას, სიმკვრივისა და გარსების თეორიაში [80], [81], [83].

წინა საუკუნის 90–იანი წლების დასაწყისში სივრცითი არალოკალური ამოცანებისთვის დაიწყო დროითი არალოკალური სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა. ამ მიმართულებით საინტერესო კვლევები მოცემულია გ. ავალიშვილის, დ გორდეზიანის, ჰ. მელაძის, ვ. მაკაროვის, ი. გავრილიუკის, დ. სიტნიკის, ბ. ვასილიკის ვ. შელუხინის და სხვათა შრომებში ([41], [65], [58], [33], [37]).

დ. გორდეზიანის [80], [81] ნაშრომებში გამოკვლეულია ბიწაძე–სამარსკის არალოკალური სასაზღვრო ამოცანების დირიხლეს ამოცანების მიმდევრობაზე დაყვანის ალგორითმი ელიფსური განტოლებებისათვის. ეს მეთოდიკა საშუალებას გვაძლევს არამხოლოდ რიცხვითად ამოვხსნათ ამოცანა, არამედ დავამტკიცოთ ამონახსნის არსებობა. არსებობს არალოკალური სასაზღვრო ამოცანების სხვადასხვა განზოგადოებებიც [50], [80], [91], [98], [117] და სხვა. [98], [99] შრომებში განხილულია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ბიწაძე–სამარსკის

არალოკალური სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხები.

ბიწაძე–სამარსკის არალოკალური სასაზღვრო ამოცანების შესწავლისას რიცხვითი მეთოდებისა და გამოყენებითი თვალსაზრისით საინტერესოა მ. საპაგოვასის, გ. ბერიკელაშვილის, ა. გულინის, ვ. მოროზოვის და სხვათა შრომები (მაგ. [61], [7], [46]).

ნათელია, რომ არალოკალური სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა და მათი რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების ანალიზი – გამოყენებითი და გამოთვლითი მათემატიკის საჭირო მიმართულებაა, აქტუალურია, პრაქტიკული და თეორიული თვალსაზრისით ერთობ საინტერესოა.

ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორიის შექმნა დაკავშირებული იყო ტექნიკური და ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტასთან. მართვის პრობლემები, კერძოდ საუკეთესოს პოვნის პრობლემა არსებობს ყველგან. ასეთი ამოცანების ნათელი მაგალითებია - მფრინავი აპარატების მართვა, ტექნოლოგიური პროცესების მართვა წარმოებაში და ა.შ. ოპტიმალური პროცესების მათემატიკური თეორიის ინტენსიური განვითარება დაფუძნებულია მის მრავალმხრივ გამოყენებებზე. პროცესების უმრავლესობა, რომელთანაც გვაქვს საქმე პრაქტიკაში, მართვადია და ამიტომაც მათი რეალიზაციისას მნიშვნელოვანია მივიღოთ ოპტიმალური ვარიანტი. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი [111] აღმოჩნდა ეფექტური მათემატიკური მეთოდი ისეთი ოპტიმალური მართვის ამოცანების ამოსახსნელად, როდესაც პროცესი შეიძლება აღვწეროთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებით. ოპტიმიზაციის მრავალ ამოცანაში სიმკვრივის თეორიიდან, დიფუზური პროცესებიდან, მექანიკიდან, ქიმიური რეაქციის კინეტიკის და სხვა სისტემის მდგომარეობა აღიწერება კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებით [72], [75], [100], [120] და სხვა. ამიტომაც ასეთი სისტემის მართვის პრობლემების შესწავლა მეტად საყურადღებოა [74], [97].

მაქსიმუმის პრინციპის გავრცელება კერძო წარმოებულებიან ამოცანებზე ატარებს არატრივიალურ ხასიათს [75], [100]. ამ გამოკვლევებში აღსანიშნავია ი. ვ. ეგოროვის შრომები [89], [90], რომლებშიც განაწილებულ პარამეტრებიანი

სისტემებისათვის მაქსიმუმის პრინციპი გამომდინარეობს ბანახის სივრცეში ოპტიმალური ამოცანების განხილვის საფუძველზე.

[71], [74], [75] ნაშრომებში გამოკვლეულია თხელი დრეკადი პლასტინის სისქის ოპტიმალური განაწილების ამოცანები. [72], [120], [121]–ში განხილულია კონსტრუქციის ოპტიმიზაციის ამოცანები, სადაც მოითხოვება განისაზღვროს უცნობი საზღვრის ფორმა ისე, რომ მოვახდინოთ რომელიმე ფუნქციონალის მინიმიზაცია სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისათვის.

ლიონსის მონოგრაფიაში [96] დიდი ყურადღება აქვს დათმობილი წრფივ ელიფსურ ამოცანებს კვადრატული მინიმიზაციის ფუნქციით, რომლის ამოხსნაც ვარიაციული უტოლობების დახმარებით დაიყვანება ეგრეთწოდებულ ცალმხრივ სასაზღვრო ამოცანებზე და ევოლუციური ტიპის ამოცანებზე.

პლოტნიკოვის [106], [107] ნაშრომებში ჩამოყალიბებულია ერთიანი სქემა ოპტიმალობის აუცილებელი პირობის მტკიცებისა ოპტიმიზაციიის ფართო კლასის ამოცანებისათვის, სადაც პროცესები აღიწერება მათემატიკური ფიზიკის ევოლუციური და სტაციონალური განტოლებების არაწრფივი ფუნქციონალური სისტემებით.

განაწილებულ პარამეტრებიანი სისტემებისათვის ოპტიმიზაციის საკითხების გამოკვლევისას მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს განზოგადოებული ამონახსნის არსებობას, როცა განტოლობის მარჯვენა ნაწილი წყვეტადია. ვეკუას მონოგრაფიაში [76] რიმან–ჰილბერტის ამოცანებისათვის შესწავლილია განზოგადოებული ანალიტიკური ფუნქციების არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი. [101] ნაშრომში განხილულია პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლობისათვის რიმან–ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის განზოგადოებული ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი.

ოპტიმიზაციის საკითხების გამოკვლევისას მნიშვნელოვანია მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე ოპტიმიზაციის სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნის ალგორითმების აგება [99], [120] და სხვა. ოპტიმალური მართვის წრფივი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნისას ასევე მნიშვნელოვანია სასაზღვრო ამოცანებისათვის

განზოგადოებული ამონახსნის საპოვნელად რიცხვითი მეთოდების აგება და გამოკვლევა.

ყოველივე ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობის მქონე პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ოპტიმალური მართვის ამოცანების კვლევა წარმოადგენს აქტუალურ პრობლემას.

2. კვლევის ძირითადი მიზნები და ამოცანები

კვლევის მიზანი

1. სიბრტყეზე პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის განზოგადოებული ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობების მიღება.
2. ოპტიმალობის აუცილებელი პირობების მიღება პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობებით. ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების მიღება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობებით.
3. ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების მიღება წრფივი ელიფსური ტიპის განტოლებებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობებით. არაკლასიკური შეუღლებული ამოცანების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობების მიღება.
4. მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე წრფივი ოპტიმალური მართვის ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმების აგება. ამ ალგორითმების შესაბამისი პროგრამული მოდულების შექმნა Mathcad-ში და რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება.

კვლევის სიახლე

ნაშრომში მიღებულია პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობისა

და ერთადერთობის პირობები $C_\alpha(\overline{G})$ სივრცეში. ასევე მიღებულია პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები $C_\alpha^p(\overline{G})$ სივრცეში და შემდეგი აპრიორული შეფასება $\| w \|_{C_\alpha^p(\overline{G})} \le \lambda \| d \|_{L_p(\overline{G})}$.

განხილულია ოპტიმალური მართვის ამოცანა პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობით, მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი პირობები. აგებულია შეუღლებული განტოლება დიფერენციალური ფორმით. მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები წრფივი ოპტიმალური მართვის ამოცანისათვის.

მიღებულია ელიფსური განტოლებისათვის არაკლასიკური სასაზღვრო პირობებიანი შეუღლებული ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები $W_2^2(G \setminus \gamma_0) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(G)$ სივრცეში.

განხილულია ოპტიმალური მართვის ამოცანა ელიფსური განტოლებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობით და ჩამოყალიბებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე აგებულია რიცხვითი ალგორითმი შესაბამისი წრფივი ოპტიმალური მართვის ამოცანების ამოხსნისათვის. ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის არალოკალური სასაზღვრო ამოცანის და შეუღლებული ამოცანის ამონახსნის საპოვნელად გამოყენებულია არალოკალური სასაზღვრო ამოცანის დირიხლეს ამოცანების მიმდევრობაზე დაყვანის ალგორითმი.

შედგენილია ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანების და არაკლასიკური შეუღლებული ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები, როგორც მეორე რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის, ასევე ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის. შექმნილია ამ ალგორითმების შესაბამისი პროგრამული მოდულები Mathcad-ში, შესრულებულია რიცხვითი რეალიზაცია და მიღებული რიცხვითი შედეგები წარმოდგენილია ცხრილური და გრაფიკული სახით.

ნაშრომის აპრობაცია

ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგების შესახებ გაკეთებულია მოხსენებები საუნივერსიტეტო და საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე:

შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სამეცნიერო კონფერენცია, ბათუმი, 2009წ. თემა: „დრეკადობის თეორიის ერთი ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები“;

საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის III საერთაშორისო კონფერენცია, ბათუმი, 2–9 სექტემბერი, 2012წ. თემები: „ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ბიწაძე სამარსკის ამოცანის ამოხსნა MathCad–ის საშუალებით“ და „ერთი ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნა MathCad–ის საშუალებით“;

II საერთაშორისო–სამეცნიერო კონფერენცია “კომპიუტინგი/ინფორმატიკა, განათლების მეცნიერებები, მასწავლებლის განათლება”, ბათუმი, 21–23 სექტემბერი, 2012წ. თემები: „ერთი ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი“ და „ერთი შეუღლებული ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი“;

საერთაშორისო სასწავლო–პრაქტიკული კონფერენცია „სპეციალისტების მომზადების აქტუალური პრობლემები“, უკრაინა, ხმელნიცკი, 15–19 მაისი, 2013წ. თემა: „ელიფსური ტიპის განტოლებისათვის ერთი არალოკალური სასაზღვრო ამოცანის ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი MathCad–ის საშუალებით“;

საერთაშორისო კონფერენცია „ლის ჯგუფები, დიფერენციალური განტოლებები და გეომეტრია“, ბათუმი, 10–22 ივნისი, 2013წ. თემა: „არალოკალური სასაზღვრო ამოცანისათვის ოპტიმალური მართვის ამოცანის ოპტიმალობის პირობები და ამოხსნის ალგორითმები“.

ნაშრომში მიღებული შედეგები ასევე განხილულია კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტის სამეცნიერო სემინარებზე.

ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია სამეცნიერო სტატიების სახით საერთაშორისო რეფერირებად და რეცენზირებად ჟურნალებში [21]-[25], [87].

სადისერტაციო ნაშრომის წინასწარი განხილვა (აპრობაცია) შედგა შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის კომპიუტერულ მეცნიერებათა

დეპარტამენტის გაფართოებულ სხდომაზე (ოქმი N3, 29 ოქტომბერი, 2012 წელი), სადაც იგი მოწონებული და რეკომენდირებული იქნა დაცვისათვის.

დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა

სადისერტაციო ნაშრომის საერთო მოცულობა შეადგენს 116 გვერდს, შედგება შესავლის, სამი თავის, დასკვნის და დისერტაციში გამოყენებული 123 დასახელების ლიტერატურის ჩამონათვალისაგან.

3. ნაშრომის მოკლე აღწერა

თავი I.

პირველ პარაგრაფში პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის განხილულია ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი.

შემოღებულია აღნიშვნები: G კომპლექსური E სიბრტყის შემოსაზღვრული სიმრავლეა Γ საზღვრით, რომელიც თავის მხრივ არის ლიაპუნოვის ჩვეულებრივი ჩაკეტილი წირი. γ აღვნიშნოთ Γ საზღვრის ნაწილი, რომელიც თავის მხრივ წარმოადგენს ლიაპუნოვის გახსნილ წირს პარამეტრული განტოლებით $z = z(s)$, $0 \le s \le \delta$. ვთქვათ γ_0 დიფეომორფულია γ–ს $z_0 = I(z)$ ასახვით, მდებარეობს G არეში და მოცემულია $z_0 = z_0(s)$, $0 \le s \le \delta$ პარამეტრული განტოლებით. დავუშვათ, რომ γ_0 კვეთს Γ-ს, მაგრამ არ არის მისი მხები, $z = x + iy \in G$, $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ - სობოლევის განზოგადოებული წარმოებულია.

$\overline{G}$ არეში განხილულია ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანა პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$\partial_{\overline{z}} w = f(z, w, \overline{w}), \quad z \in G, \tag{0.1}$$

$$\operatorname{Re}[w(z)] = \varphi_1(z), \quad z \in \Gamma \setminus \gamma, \tag{0.2}$$

$$\operatorname{Re}[w(z(s))] = \sigma \operatorname{Re}[w(z_0(s))], \; z(s) \in \gamma, \; z_0(s) \in \gamma_0, \; 0 \le s \le \delta, \tag{0.3}$$

$$\operatorname{Im}[w(z^*)] = c, \quad z^* \in \Gamma \setminus \gamma, \quad 0 < \sigma = \text{const}. \tag{0.4}$$

მოყვანილია შემდეგი პირობები:

(A1). $f(z,w,\overline{w})$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $z\in G,\ |w|<R$, $f(z,0,0)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$ და $|f(z,w,\overline{w})-f(z,w_0,\overline{w}_0)|\le L(|w-w_0|+|w-\overline{w}_0|)$.

(**A2**). $\varphi_1(z)\in C_\alpha(\Gamma\setminus\gamma)$, $\alpha>1/2$, რომელთა გათვალისწინებით $\varphi_1(z)$ ფუნქციის მნიშვნელობები γ და γ_0 კონტურების ბოლოებზე შესაბამისად ემთხვევიან.

(A3). არსებობს ისეთი $R_1>0,\ R_1\le R$ რიცხვები, რომ სრულდება უტოლობა

$$\|\psi_n\|_{C_\alpha(\overline{G})}+\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)\left(2L|G|^{1/p}R_1\right)\le R_1.$$

(A4). $$2|G|^{1/p}L\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)<1.$$

დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

<u>თეორემა **1**</u>. ვთქვათ სრულდება (A1)-(A4) პირობები, მაშინ (0.1)-(0.4) ამოცანის ამონახსნი არსებობს $C_\alpha(\overline{G})$ სივრცეში და ერთადერთია.

პარაგრაფ 2 – ში პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის $\overline{G}$ არეში განხილულია ბიწაძე-სამარსკის შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{aligned}
&\partial_{\overline{Z}}w=A(z)w+B(z)\overline{w}+d(z),\quad z\in G,\\
&\operatorname{Re}[w(z)]=0,\ z\in\Gamma\setminus\gamma,\\
&\operatorname{Re}[w(z(s))]=\sigma\operatorname{Re}[w(z_0(s))],\ z(s)\in\gamma,\quad z_0(s)\in\gamma_0,\\
&\operatorname{Im}[w(z^*)]=0,\ z^*\in\Gamma\setminus\gamma,\quad 0\le s\le\delta,
\end{aligned}\tag{0.5}$$

სადაც $A(z),\ B(z),\ d(z)\in L_p(\overline{G}),\ p>2,\ |A|,|B|\le N$.

$C_\alpha^p(\overline{G})$-თი აღნიშნულია ისეთი $w(z)\in C_\alpha(\overline{G})$ ფუნქციების სიმრავლე, რომ

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}[w(z)]=0,\ z\in\Gamma\setminus\gamma,\\
&\operatorname{Re}[w(z(s))]=\sigma\operatorname{Re}[w(z_0(s))],\ z(s)\in\gamma,\ z_0(s)\in\gamma_0,\ 0\le s\le\delta,\\
&\operatorname{Im}[w(z^*)]=0,\ z^*\in\Gamma\setminus\gamma
\end{aligned}\tag{0.6}$$

და აკმაყოფილებს სასრულ ნორმას

$$\|w\|_{C_\alpha^p(\overline{G})}=\|w\|_{C_\alpha(\overline{G})}+\|\partial_{\overline{Z}}w\|_{L_p(\overline{G})}<+\infty.\tag{0.7}$$

დამტკიცებულია შემდეგი ლემა:

ლემა. ნებისმიერი $d(z)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$ ფუნქციისათვის (0.5) ამოცანის $w(z)$ ამონახსნი არსებობს, ეკუთვნის $C_\alpha^p(\overline{G})$ სივრცეს და მისთვის სამართლიანია შემდეგი აპრიორული შეფასება:

$$\| w \|_{C^p_\alpha(\bar{G})} \le \lambda \| d \|_{L_p(\bar{G})}, \tag{0.8}$$

სადაც λ - დადებითი მუდმივაა, რომელიც დამოკიდებულია p, N-ზე და $|G| = mesG$.

პარაგრაფ 3 – ში დასმულია ოპტიმალური მართვის ამოცანა და მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა.

U–თი აღნიშნულია რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლე E-დან. ყოველ $u(z): G \to U$ ფუნქციას ეწოდება მართვა. U სიმრავლეს ეწოდება მართვის არე. $u(z)$ ფუნქციას ეწოდება შესაძლო მართვა, თუ $u(z) \in L_p(G)$, $p > 2$. ყველა დასაშვებ მართვათა სიმრავლე აღნიშნულია Ω-თი.

ყოველი ფიქსირებული $u \in \Omega$ - სათვის $\bar{G}$ არეში პირველი რიგის კვაზიწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის განხილულია ბიწაძე-სამარსკის შემდეგი ამოცანა

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}} w = f(z, w, \bar{w}, u), \quad z \in G, \\
&\mathrm{Re}[w(z)] = \varphi_1(z), \quad z \in \Gamma \setminus \gamma, \\
&\mathrm{Re}[w(z(s))] = \sigma \mathrm{Re}[w(z_0(s))], \ z(s) \in \gamma, \ z_0(s) \in \gamma_0, \\
&\mathrm{Im}[w(z^*)] = c, \ \ z^* \in \Gamma \setminus \gamma, \ \ c = const, \ \ 0 < \sigma = const,
\end{aligned} \tag{0.9}$$

ასევე განხილულია ფუნქციონალი

$$I(u) = \iint_G F(x, y, w_1, w_2, u_1, u_2) dxdy \tag{0.10}$$

და შემდეგი შეზღუდვების სისტემა

$$L_K(u) = \iint_G \Phi_k(x, y, w_1, w_2, u_1, u_2) dxdy \le 0, \quad k = \overline{1,2}. \tag{0.11}$$

სადაც $z = x + iy$, $w = w_1 + iw_2$, $u = u_1 + iu_2$.

დასმულია ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ $u_0(z) \in \Omega$ ფუნქცია, რომლისთვისაც ბიწაძე-სამარსკის (0.9) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს (0.11) შეზღუდვებს და (0.10) ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $u_0(z) \in \Omega$ ფუნქციას ეწოდება ოპტიმალურ მართვა, ხოლო (3.1) ამოცანის შესაბამის განზოგადოებულ $w_0(z)$ ამონახსნს - ოპტიმალური ამონახსნი.

ნაჩვენებია, რომ (A1)-(A4) პირობებში ყოველი ფიქსირებული $u \in \Omega$ - სათვის $\bar{G}$ არეში (0.9) ამოცანის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია თეორემა 1–ის ძალით.

ოპტიმალობის პირობის მიღებისათვის დამატებით დაშვებულია, რომ:

(A5). $f(z,w,q,u)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $|f'_w|$ და $|f'_q|$, რომლებიც ასევე უწყვეტია იმავე არგუმენტებით, რომლითაც f ფუნქცია. F ფუნქცია უწყვეტია w_1, w_2, u_1, u_2 - არგუმენტების მიმართ. უწყვეტად წარმოებადია w_1, w_2 - ით და ეკუთვნის $L_p(G)$, $p>2$ სივრცეს.

(A6). ყოველი $(w,q)\in S_{wq}^{R_1}=\{(w,q):|w|,|q|<R\}$-სათვის G-ში სამართლიანია შემდეგი შეფასებები: $|f'_w|$, $|f'_q|\le N_1(R)<+\infty$, $|f|\le N_2(R)<+\infty$.

პარაგრაფ 4–ში მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა იმ შემთხვევაში, როცა მართვის არე არის ღია ამოზნექილი სიმრავლე. დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა_2. თუ $u_0(z)$ - ოპტიმალური მართვაა, $w_0(z)$ მისი შესამამისი ამონახსნია (0.9) ამოცანისათვის, მაშინ არსებობს P კონუსი R^{r+1}-დან და ψ_0, ψ_{0k}, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციები $L_q(\overline{G})$-დან ისეთი, რომ ნებისმიერი $\mu\in P$ ვექტორისათვის თითქმის ყველგან G-ზე სრულდება თანაფარდობა

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\{[\mu_0(\psi_0(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar u}F(0))+\sum_{k=1}^{r}\mu_k(\psi_{0k}(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar u}\Phi_k(0))]u_0\}=\\&=\inf_{u\in U}\operatorname{Re}\{[\mu_0(\psi_0(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar u}F(0))+\sum_{k=1}^{r}\mu_k(\psi_{0k}(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar u}\Phi_k(0))]u\}.\end{aligned}\tag{0.12}$$

პარაგრაფ 5–ში მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა იმ შემთხვევაში, როცა მართვის არე არის რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლე. დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა_3. თუ $u_0(z)$- ოპტიმალური მართვაა, $w_0(z)$ - ამ მართვის შესაბამისი (0.9) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ არსებობს P კონუსი R^{r+1}-დან, ასევე ψ_0, ψ_{0k}, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციები $L_q(\overline{G})$, $1/p+1/q=1$-დან, რომლებიც განსაზღვრულია $\psi_0=(S_0^{-1})^*T_0$ და $\psi_{0k}=(S_0^{-1})^*T_{0k}$, $k=\overline{1,r}$ ტოლობებით, ისეთები, რომ ნებისმიერი $\mu\in P$ ვექტორისათვის თითქმის ყველგან G-ზე სრულდება თანაფარდობა:

$$\begin{aligned}&\mu_0(\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0)\psi_0(z)]+F(x,y,w_0,\overline{w}_0,u_0))+\\&+\sum_{k=1}^{r}\mu_k(\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0)\psi_{0k}(z)]+\Phi_k(x,y,w_0,\overline{w}_0,u_0))=\\&=\inf_{u\in U}\Big\{\mu_0(\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u)\psi_0(z)]+F(x,y,w_0,\overline{w}_0,u))+\\&+\sum_{k=1}^{r}\mu_k(\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u)\psi_{0k}(z)]+\Phi_k(x,y,w_0,\overline{w}_0,u))\Big\}.\end{aligned}\tag{0.13}$$

ოპტიმალური მართვის ამოცანისათვის, (0.11) ინტეგრალური შეზღუდვების გარეშე, მინიმუმის პრინციპი ჩამოყალიბებულია შემდეგნაირად.

თეორემა_4. ვთქვათ სრულდება თეორემა_3-ის პირობები. მაშინ $u_0(z)$-ის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია, რომ თითქმის ყველგან G-ზე სრულდებოდეს თანაფარდობა

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0)\psi_0(z)+F(x,y,w_0,\overline{w}_0,u_0)]=\\&=\inf_{u\in U}\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u)\psi_0(z)+F(x,y,w_0,\overline{w}_0,u)].\end{aligned}\tag{0.14}$$

პარაგრაფ 6–ში აგებულია შეუღლებული განტოლება დიფერენციალური ფორმით

$$\begin{gathered}\partial_{\overline{z}}\psi+\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}\psi+\frac{\partial\overline{f}(u_0)}{\partial\overline{w}}\overline{\psi}=-2\partial_w F(u_0),\quad z\in G,\\ \mathrm{Re}\big[\lambda(z)\psi(z)\big]=0,\quad z\in\Gamma.\end{gathered}\tag{0.15}$$

$$\begin{gathered}\partial_{\overline{z}}\psi_k+\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}\psi_k+\frac{\partial\overline{f}(u_0)}{\partial\overline{w}}\overline{\psi}_k=-2\partial_w\Phi_k(u_0),\quad z\in G,\\ \mathrm{Re}\big[\lambda(z)\psi_k(z)\big]=0,\quad z\in\Gamma,\quad k=\overline{1,r}.\end{gathered}\tag{0.16}$$

შეუღლებული განტოლებების აგების შემდეგ თეორემა_1, თეორემა_2 და თეორემა_3 შესაბამისად ჩამოყალიბებულია შემდეგი სახით:

თეორემა_4. თუ $u_0(z)$ - ოპტიმალური მართვაა, $w_0(z)$ – ამ მართვის შესამამისი (0.9) ამოცანის ამონახსნია, მაშინ არსებობს P კონუსი R^{r+1}-დან და ψ_0, ψ_{0k}, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციები $L_q(\overline{G})$-დან, რომლებიც არის (0.15) და (0.16) განტოლების ამონახსნები, ისეთი, რომ ნებისმიერი $\mu\in P$ ვექტორისათვის თითქმის ყველგან G-ზე სრულდება (3.5) ტოლობა.

თეორემა_5. თუ $u_0(z)$- ოპტიმალური მართვაა, $w_0(z)$ - ამ მართვის შესაბამისი (0.9) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ არსებობს P კონუსი R^{r+1}-დან, ასევე ψ_0,ψ_{0k}, $k=\overline{1,r}$

ფუნქციები $L_q(\overline{G})$, $1/p+1/q=1$-დან, რომლებიც არის (0.15) და (0.16) განტოლების ამონახსნები, ისეთები, რომ ნებისმიერი $\mu\in P$ ვექტორისათვის თითქმის ყველგან G-ზე სრულდება (0.13) თანაფარდობა.

ოპტიმალური მართვის ამოცანისათვის, (0.11) ინტეგრალური შეზღუდვების გარეშე, მინიმუმის პრინციპი ჩამოყალიბებულია შემდეგნაირად.

თეორემა_6. ვთქვათ სრულდება თეორემა_5-ის პირობები. მაშინ $u_0(z)$-ის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია, რომ თითქმის ყველგან G-ზე სრულდებოდეს თანაფარდობა

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0)\psi_0(z)+F(x,y,w_0,\overline{w}_0,u_0)]=\\&=\inf_{u\in U}\mathrm{Re}[f(z,w_0,\overline{w}_0,u)\psi_0(z)+F(x,y,w_0,\overline{w}_0,u)]\end{aligned}$$

პარაგრაფ 7–ში განხილულია წრფივი ოპტიმალური მართვის ამოცანა პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის არალოკალური სასაზღვრო პირობებით, მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

განხილულია შემთხვევა, როცა $\overline{G}$ არის მართკუთხედი $\{z=x+iy:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$, Γ - G-ს საზღვარი, ხოლო $\gamma_0=\{z_0=x_0+iy:\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma_1=\{z=1+iy:\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma_2=\{z=x+i:\ 0\le x\le 1\}$, $\gamma_3=\{z=iy:\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma_4=\{z=x:\ 0\le x\le 1\}$, $z^*\in\Gamma\setminus\gamma_1$.

ყოველი ფიქსირებული $\omega\in\Omega$-თვის $\overline{G}$ არეში განხილულია ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანა პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის:

$$\begin{aligned}&\partial_{\overline{z}}w+B(z)\overline{w}=f(z)\omega,\ z\in G,\\&\mathrm{Re}[w(z)]=g(z),\ z\in\Gamma\setminus\gamma_1,\\&\mathrm{Re}[w(z_1)]=\sigma\,\mathrm{Re}[w(z_0)],\ z_0\in\gamma_0,\ \ z_1\in\gamma_1,\\&\mathrm{Im}[w(z^*)]=\mathrm{const},\ \ 0<\sigma=\mathrm{const},\end{aligned}\tag{0.17}$$

სადაც $c(z), d(z), B(z), f(z)\in L_p(\overline{G}),\ p>2,\ g(z)\in C_\alpha(\Gamma\setminus\gamma_1),\ 0<\alpha<1$.

ნაჩვენებია, რომ ყოველი ფიქსირებული $\omega\in\Omega$-თვის $\overline{G}$ არეში (0.17) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეკუთვნის $C_\alpha(\overline{G})$ სივრცეს.

განხილულია ფუნქციონალი

$$I(\omega)=\operatorname{Re}\iint_G [c(z)w(z)+d(z)\omega(z)]dxdy \tag{0.18}$$

და დასმულია ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ ისეთი $\omega_0(z)\in\Omega$ ფუნქცია, რომლითაც (0.17) ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის $w_0(z)$ ამონახსნი (0.18) ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა_7. ვთქვათ $c(z), d(z), B(z), f(z)\in L_p(\overline{G}),\ p>2,\ \ g(z)\in C_\alpha(\Gamma\setminus\gamma_1),\ \ 0<\alpha<1$ და $\rho(x)\psi(z)$ არის შემდეგი შეუღლებული ამოცანის ამონახსნი:

$$\begin{aligned}
&\partial_{\overline{z}}(\rho(x)\psi(z))-\overline{B}(z)\rho(x)\psi(z)=c(z),\\
&\operatorname{Re}[\rho(x)\psi(z)]=0,\ \ z\in\gamma_2\cup\gamma_4,\\
&\operatorname{Re}[i\rho(x)\psi(z)]=0,\ \ z\in\gamma_3\cup\gamma_1,\\
&\operatorname{Re}[\rho(x)\psi(z_0^+)-\rho(x)\psi(z_0^-)]=\sigma\operatorname{Re}[\rho(x)\psi(z)],\ z_0\in\gamma_0,\ z\in\gamma_1,
\end{aligned} \tag{0.19}$$

მაშინ $\omega_0(z)$, $w_0(z)$ წყვილის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია და საკმარისი თითქმის ყველგან G -ზე შემდეგი მინიმუმის პრინციპის შესრულება:

$$\operatorname{Re}[(d(z)-\rho(x)\psi(z)f(z))\omega_0(z)]=\inf_{\omega\in U}\operatorname{Re}[(d(z)-\rho(x)\psi(z)f(z))\omega(z)].$$

თავი II

პირველ პარაგრაფში დასმულია ოპტიმალური მართვის ამოცანა ელიფსური განტოლებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობით და მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

განხილულია შემთხვევა, როცა $\overline{G}$ არე არის მართკუთხედი, $\overline{G}=[0,1]\times[0,1]$, Γ - G არის საზღვარი, $0<x_0<1$, $\gamma_0=\{(x_0,y):\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma=\{(1,y):\ 0\le y\le 1\}$, $A_1(x,y),\ A_2(x,y)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$, $0\ge A_3(x,y)\in L_\infty(\overline{G})$, $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ d(x,y)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$, U - რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლე R -დან. ყოველ $\omega(x,y):G\to U$ ფუნქციას ეწოდება მართვა. U სიმრავლეს ეწოდება მართვის არე. $\omega(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება დასაშვები მართვა, თუ $\omega(x,y)\in L_p(G),\ p>2$. Ω –თი აღნიშნულია ყველა დასაშვები მართვის სიმრავლეს.

ყოველი ფიქსირებული $\omega\in\Omega$ -სთვის $\overline{G}$ არეში ელიფსური განტოლებისათვის განხილულა ბიწაძე–სამარსკის შემდეგი ამოცანა:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+A_3(x,y)u=\\
=a(x,y)\omega(x,y)+b(x,y),\quad (x,y)\in G,\\
u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,\\
u(1,y)=\sigma u(x_0,y),\quad 0\le y\le 1,\ \sigma>0.
\end{gathered}
\tag{0.20}
$$

განხილულია ფუნქციონალი

$$
I(\omega)=\iint_G [c(x,y)u(x,y)+d(x,y)\omega(x,y)]dxdy \tag{0.21}
$$

და დასმულია ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ისეთი $\omega_0(x,y)\in\Omega$ ფუნქცია, რომლითაც (0.20) ამოცანის $u_0(x,y)$ ამონახსნი (0.21) ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $\omega_0(x,y)\in\Omega$ ფუნქციას ვუწოდებთ ოპტიმალურ მართვას, ხოლო შესაბამის $u_0(x,y)$ ამონახსნს - ოპტიმალურ ამონახსნს.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

<u>თეორემა 1</u>. ვთქვათ $\psi_0(x,y)$ არის შემდეგი შეუღლებული განტოლების ამონახსნი

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x}+A_3(x,y)\psi=-c(x,y),\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\
&\psi(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\\
&\frac{\partial\psi(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial\psi(1,y)}{\partial x},\quad 0\le y\le 1,
\end{aligned}
\tag{0.22}
$$

მაშინ (u_0,ω_0) წყვილის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მინიმუმის პრინციპის შესრულება

$$
\inf_{\omega\in U}[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega=[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega_0 \tag{0.23}
$$

თითქმის ყველგან G –ზე.

პარაგრაფ 2–ში დამტკიცებულია (0.22) შეუღლებული განტოლების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა.

თეორემა_2. არსებობს ისეთი $\sigma_0>0$, რომ ნებისმიერი $0<\sigma\le\sigma_0$–სათვის (0.22) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეკუთვნის $W_2^2(G\setminus\gamma_0)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(G)$ სივრცეს.

პარაგრაფ 3–ში დასმულია ოპტიმალური მართვის ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობით და ჩამოყალიბებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

განხილულია შემთხვევა, როცა $\overline{G}$ არე არის მართკუთხედი, $\overline{G}=[0,1]\times[0,1]$, Γ - G არის საზღვარი, $0<x_0<1$, $\gamma_0=\{(x_0,y):\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma=\{(1,y):\ 0\le y\le 1\}$, $0\le q(x,y)\in L_\infty(\overline{G})$ $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ d(x,y)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$.

ყოველი ფიქსირებული $\omega\in\Omega$ - თვის $\overline{G}$ არეში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის განხილულია ბიწაძე–სამარსკის შემდეგი ამოცანა:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-q(x,y)u=a(x,y)\omega(x,y)+b(x,y),\quad (x,y)\in G,\\
&u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,\\
&u(1,y)=\sigma u(x_0,y),\quad 0\le y\le 1,\ \sigma>0.
\end{aligned}\tag{0.24}$$

განხილულია ფუნქციონალი

$$I(u)=\iint_G[c(x,y)u(x,y)+d(x,y)\omega(x,y)]dxdy \tag{0.25}$$

და დასმულია ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ისეთი $\omega_0(x,y)\in\Omega$ ფუნქცია, რომლითაც (0.24) ამოცანის ამონახსნი (0.25) ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

<u>თეორემა 3</u>. ვთქვათ $\psi_0(x,y)$ არის შემდეგი შეუღლებული განტოლების ამონახსნი

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-q(x,y)\psi=-c(x,y),\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\
&\psi(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\\
&\frac{\partial\psi(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial\psi(1,y)}{\partial x},\quad 0\le y\le 1,
\end{aligned}\tag{0.26}$$

მაშინ (u_0,ω_0) –ის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მინიმუმის პრინციპის შესრულება

$$\inf_{\omega\in U}[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega=[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega_0 \tag{0.27}$$

თითქმის ყველგან G –ზე.

ამავე პარაგრაფში განხილულია ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი. ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნის სქემას აქვს სახე:

- დასაწყისში ვხსნით (0.26) ამოცანას $\psi_0(x, y)$ ამონახსნის საპოვნელად;

- $\psi_0(x, y)$ ამონახსნის დახმარებით (0.27)-დან ვპოულობთ ოპტიმალურ მართვას $\omega_0(x, y)$;

- ვხსნით (0.24) ამოცანას $u_0(x, y)$ ოპტიმალური ამონახსნის საპოვნელად.

(0.24) არალოკალური სასაზღვრო ამოცანის და (0.26) შეუღლებული არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისათვის გამოყენებულია იტერაციული პროცესი, რომლითაც არალოკალური სასაზღვრო ამოცანა დაიყვანება დირიხლეს ამოცანების მიმდევრობაზე. იტერაციის ყოველ ბიჯზე დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი რეალიზაცია ხდება Mathcad–ში სტანდარტული **relax(a, b, c, d, e, f, u, rjac)** ფუნქციის საშუალებით. რიცხვითი შედეგები წარმოდგენილია გრაფიკული სახით.

თავი III

პირველ პარაგრაფში განხილულია MathCad-ში ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ზოგიერთი მეთოდი. მოყვანილია რამდენიმე მაგალითი rkfixed ფუნქციის გამოყენებით, როგორც პირველი რიგის, ასევე მეორე და მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის საპოვნელად.

მე–2 პარაგრაფში განვიხილულია იტერაციული მეთოდებით ელიფსური განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები Mathcad–ის გამოყენებით. აღწერილია relax(a, b, c, d, e, f, u, rjac) და multigrid(M, ncycle) ფუნქციების არგუმენტები და გამოყენების მეთოდები, მოყვანილია შესაბამისი მაგალითები.

მე–3 პარაგრაფში განხილულია რელაქსაციის მეთოდები სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისათვის. განხილულია გაუს–ზეიდელისა და SOR მეთოდები, ასევე განხილულია SOR მეთოდი ჩებიშევის აჩქარებით, სადაც გამოიყენება რელაქსაციის კოეფიციენტების დინამიური დათვლა.

SOR მეთოდის ამ რეალიზაციის მთავარ ღირებულებას წარმოადგენს ცდომილების ნორმის შემცირება ყოველ იტერაციაზე. შექმნილია

$SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქცია Mathcad–ში, რომელიც უზრუნველყოფს ამ მეთოდის რეალიზაციას. მოცემულია $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქციის გამოყენებით ჰელმჰოლცის განტოლების ამოხსნის ფრაგმენტი Mathcad–ში.

მე–4 პარაგრაფში მოცემულია Mathcad–ის ფრაგმენტი, სადაც შექმნილია $SOR\_Cheb\_BS\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქცია, რომელიც უზრუნველყოფს ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნას. ამ ალგორითმში იტერაციის ყოველ ეტაპზე დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა ხდება უკვე განხილული $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქციის გამოყენებით.

მოცემულია $SOR\_Cheb\_BS\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქციის გამოყენებით ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ფრაგმენტი Mathcad–ში. შედეგი წარმოდგენილია, როგორც გრაფიკული, ასევე ცხრილური სახით.

მე–4 პარაგრაფში განხილულია არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლების შეუღლებული განტოლებისათვის. Mathcad–ში შექმნილია $SOR\_Cheb\_NKL\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქცია, რომელიც უზრუნველყოფს არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნას. ამ ალგორითმში იტერაციის ყოველ ეტაპზე დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა ხდება უკვე განხილული $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქციით გამოყენებით.

მოცემულია $SOR\_Cheb\_NKL\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქციის გამოყენებით ჰელმჰოლცის განტოლების შეუღლებული განტოლებისათვის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ფრაგმენტი MathCad–ში. მაგალითისათვის აღებულია სამოდელო ამოცანა. მიღებული შედეგები წარმოდგენილია გრაფიკული და ცხრილური სახით.

სამოდელო ამოცანებზე ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტებით დაადასტურებულია იტერაცილი პროცესების კრებადობის თეორიული შეფასებები.

4. ძირითადი აღნიშვნები და ცნებები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ძირითად ტერმინებს, ცნებებს და აღნიშვნებს, ფუნქციებისა და ფუნქციონალური სივრცეების ზოგიერთ კლასს, რომლებსაც ხშირად გამოვიყენებთ შემდეგში.

4.1. ფუნქციათა ზოგიერთი კლასი და ფუნქციონალური სივრცეები

ვთქვათ G - კომპლექსური E სიბრტყის შემოსაზღვრული სიმრავლეა Γ საზღვრით, G -ს ჩაკეტვა აღვნიშნოთ $\overline{G}=G\cup\Gamma$ -ით.

$C(\overline{G})$ -ით აღვნიშნოთ $\overline{G}$ არეზე ყველა უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. თუ $C(\overline{G})$ სიმრავლის f ელემენტისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$\|f\|_{C(\overline{G})}=\operatorname*{Max}_{z\in\overline{G}}|f(z)|,\ \ z=x+iy\,, \tag{1.1}$$

მაშინ მივიღებთ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეს.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $f,g\in C(\overline{G})$, მაშინ ნამრავლი $fg\in C(\overline{G})$, საიდანაც

$$\|fg\|_{C(\overline{G})}\le\|f\|_{C(\overline{G})}\cdot\|g\|_{C(\overline{G})}\,.$$

ვთქვათ $f(z)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები x-ით და y-ით m რიგის ჩათვლით უწყვეტია G არეში. ასეთ ფუნქციათა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $C^m(G)$-ით. თუ $f(z)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები m რიგის ჩათვლით უწყვეტია ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეში, მაშინ ასეთ ფუნქციათა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $C^m(\overline{G})$-ით. აუცილებელია აღინიშნოს, რომ სასაზღვრო z_0 წერტილში წარმოებული განისაზღვრება როგორც ერთსახელიანი წარმებულების ზღვარი შიგა არეში:

$$\left(\frac{\partial^{k+j}f}{\partial x^k\partial y^j}\right)_{z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\partial^{k+j}f}{\partial x^k\partial y^j}\,,\ \ k,j=0,1,\dots,$$

თუ $C^m(\overline{G})$ სიმრავლის f ელემენტისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$\|f\|_{C^m(\overline{G})}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\left\|\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}\right\|_{C(\overline{G})}\,, \tag{1.2}$$

მაშინ მივიღებთ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეს.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $f,g\in C^m(\overline{G})$, მაშინ ნამრავლი $fg\in C^m(\overline{G})$ და

$$\|fg\|_{C^m(\overline{G})} \le \|f\|_{C^m(\overline{G})} \cdot \|g\|_{C^m(\overline{G})}.$$

ვთქვათ $\overline{G}$ ჩაკეტილ არეზე $f(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le H|z_1 - z_2|^\alpha, \quad 0<\alpha \le 1, \tag{1.3}$$

სადაც z_1 და z_2 - რაიმე წერტილებია $\overline{G}$ არიდან, ხოლო H და α დადებითი მუდმივებია, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული z_1 და z_2 წერტილების შერჩევაზე. H-ის ქვედა საზღვარს, რომელიც აკმაყოფილებს (1.3) უტოლობას, ეწოდება f ფუნქციის ჰელდერის მუდმივა და აღინიშნება $H(f)$-ით (ან $H(f,\alpha,\overline{G})$-ით). აშკარაა,

$$H(f) \equiv H(f,\alpha,\overline{G}) = \sup_{z_1,z_2\in\overline{G}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha},$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le H(f)|z_1 - z_2|^\alpha, \quad 0<\alpha \le 1. \tag{1.4}$$

შემდეგისათვის $H_\alpha(\overline{G})$-ით აღვნიშნავთ იმ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.4) უტოლობას, ამასთან α, $0<\alpha\le 1$, ერთიდაიგივეა $H_\alpha(\overline{G})$ სიმრავლის ყველა ფუნქციისათვის. (1.4) უტოლობას ეწოდება ჰელდერის პირობა.

$C_\alpha(\overline{G})$-ით აღვნიშნავთ ყველა შემოსაზღვრულ f ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჰელდერის (1.4) პირობას, ამასთან α ერთიდაიგივეა $C_\alpha(\overline{G})$ სიმრავლის ყველა ფუნქციისათვის. α-ს ჰელდერის მაჩვენებელი ეწოდება.

თუ G შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაშინ აშკარაა $C_\alpha(\overline{G})$ და $H_\alpha(\overline{G})$ სიმრავლეები ემთხვევიან: $C_\alpha(\overline{G}) \equiv H_\alpha(\overline{G})$. შემოუსაზღვრელი G სიმრავლის შემთხვევაში $C_\alpha(\overline{G}) \subset H_\alpha(\overline{G})$, აქედან გამომდინარე შეიძლება ვაჩვენოთ ფუნქციები, რომლებიც ეკუთვნის $H_\alpha(\overline{G})$-ს, მაგრამ არ ეკუთვნის $C_\alpha(\overline{G})$-ს. მაგალითისათვის შეიძლება ავიღოთ ფუნქცია $r^\alpha = |z|^\alpha$.

თუ $C_\alpha(\overline{G})$ სიმრავლის f ელემენტისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$\|f\|_{C_\alpha(\overline{G})} = \|f\|_{C(\overline{G})} + H(f,\alpha,\overline{G}), \tag{1.5}$$

მაშინ მივიღებთ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეს. ადვილი დასანახია, რომ თუ $f,g \in C_\alpha(\overline{G})$, მაშინ ნამრავლი $fg \in C_\alpha(\overline{G})$ და

$$\|fg\|_{C_\alpha(\overline{G})} \le \|f\|_{C_\alpha(\overline{G})} \cdot \|g\|_{C_\alpha(\overline{G})}.$$

$C_\alpha^m(\overline{G})$-ით აღვნიშნოთ $C^m(\overline{G})$ სივრცის იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k} \in C_\alpha(\overline{G}) \quad (k=0,1,...,m), \quad 0<\alpha \le 1.$$

თუ $C_\alpha^m(\overline{G})$ სიმრავლის f ელემენტისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$\|f\|_{C_\alpha^m(\overline{G})} = \|f\|_{C^m(\overline{G})} + \sum_{k=0}^{m} H\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}, \alpha, \overline{G}\right), \qquad (1.6)$$

მაშინ მივიღებთ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეს. ადვილი დასანახია, რომ თუ $f, g \in C_\alpha^m(\overline{G})$, მაშინ ნამრავლი $fg \in C_\alpha^m(\overline{G})$ და

$$\|fg\|_{C_\alpha^m(\overline{G})} \le \|f\|_{C_\alpha^m(\overline{G})} \cdot \|g\|_{C_\alpha^m(\overline{G})}.$$

ასევე აღსანიშნავია, რომ თუ $f, g \in C_\alpha(\overline{G})$, მაშინ

$$\|fg\|_{C_\alpha(\overline{G})} \le \|f\|_{C_\alpha(\overline{G})} \cdot \|g\|_{C(\overline{G})} + \|f\|_{C(\overline{G})} \cdot \|g\|_{C_\alpha(\overline{G})}. \qquad (1.7)$$

თუ $\|f\|_{C_\alpha(\overline{G})} \le M, \ \ \|g\|_{C_\alpha(\overline{G})} \le M, \ \ \|f\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon, \ \ \|g\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$, მაშინ (1.7)-დან მივიღებთ

$$\|fg\|_{C_\alpha(\overline{G})} \le 2M\varepsilon. \qquad (1.8)$$

ეს იგივეა რომ, თუ $C_\alpha(\overline{G})$ შემოსაზღვრული სიმრავლის f და g ელემენტები მცირეა $C(\overline{G})$ სივრცის ნორმით, მაშინ მათი ნამრავლი მცირეა $C_\alpha(\overline{G})$ სივრცის ნორმით.

ზემოთ მოცემული განსაზღვრებები შეიძლება გავავრცელოთ იმ შემთხვევისათვის, როცა G ემთხვევა მთელ კომპლექსურ E სიბრტყეს.

$C^m(E)$-ში ვიგულისხმებთ ყველა იმ $f(z)$ ფუნქციას, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $f(z) \in C^m(E_1)$ და $f\left(\frac{1}{z}\right) \in C^m(E_1)$, სადაც E_1 არის $|z| \le 1$ წრე. ასევე $C_\alpha^m(E)$-ში ვიგულისხმებთ ყველა იმ $f(z)$ ფუნქციას, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $f(z) \in C_\alpha^m(E_1)$ და $f\left(\frac{1}{z}\right) \in C_\alpha^m(E_1)$, სადაც E_1 არის $|z| \le 1$ წრე. ამიტომაც შეიძლება ვილაპარაკოთ $C_\alpha(E)$ და $C_\alpha^m(E)$ ბანახის ტიპის სივრცეებზე.

შვარცის ლემა [123]*: ვთქვათ* $\Delta = \{z: \ |z| < 1\}$ *- ერთეულოვანი წრეა კომპლექსურ* E *სიბრტყეზე,* $f(z)$ *ანალიზურია* Δ *-ში და აკმაყოფილებს პირობებს:*

1. $f(0) = 0$*;*

2. $f(\Delta) \subset \overline{\Delta}$*, ან რაც იგივეა,* $|f(z)| \le 1$*.*

მაშინ:

1. $|f(z)| \le |z|$ Δ *-ში ყოველი არანულოვანი* z *-სათვის;*

2. $|f'(0)| \le 1$*.*

ვთქვათ $f(z)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია G არეში, აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\iint_{G'} |f(z)|^p \, dxdy < M_{G'}, \quad p \ge 1, \tag{1.9}$$

სადაც G' - რაიმე ჩაკეტილი (შემოსაზღვრული) ქვესიმრავლეა G არეში, ხოლო $M_{G'}$ - მუდმივაა, რომელიც დამოკიდებულია G'-ზე, ამასთან G' ერთიდაიგივეა ყველა $G' \subset G$ -სათვის. ასეთ ფუნქციათა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $L_p(G)$ -ით.

განვიხილოთ იმ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\|f\|_{L_p(\overline{G})} = \left(\iint_G |f(z)|^p \, dx \, dy \right)^{1/p} < \infty. \tag{1.10}$$

ამ სიმრავლეს აღვნიშნავთ $L_p(\overline{G})$ -ით, ხოლო არაუარყოფით $\|f\|_{L_p(\overline{G})}$ რიცხვს ვუწოდებთ $L_p(\overline{G})$ სივრცის f ელემენტის ნორმას. როგორც ცნობილია, $L_p(\overline{G})$ ბანახის ტიპის სრული ნორმირებული სივრცეა. ეს მტკიცდება ჰელდერის და მინკოვსკის უტოლობების გამოყენებით:

ჰელდერის უტოლობა. თუ

$$f_k \in L_{p_k}(\overline{G}) \ \ (k = 1, \ldots, n), \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} \le 1,$$

მაშინ

$$f_1 f_2 \ldots f_n \in L_p(\overline{G})$$

და

$$\|f_1 f_2 \ldots f_n\|_{L_p(\overline{G})} \le \|f_1\|_{L_{p_1}(\overline{G})} \|f_2\|_{L_{p_2}(\overline{G})} \ldots \|f_n\|_{L_{p_n}(\overline{G})}, \quad p \ge 1. \tag{1.11}$$

მინკოვსკის უტოლობა. თუ

$$f_1, f_2, \ldots f_n \in L_p(\bar{G}),$$

მაშინ

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n \in L_p(\bar{G})$$

და

$$\|f_1 + f_2 + \ldots + f_n\|_{L_p(\bar{G})} \le \|f_1\|_{L_p(\bar{G})} + \|f_2\|_{L_p(\bar{G})} + \ldots + \|f_n\|_{L_p(\bar{G})}, \quad p \ge 1. \tag{1.12}$$

აქვე მოვიყვანთ $L_p(\bar{G})$ ფუნქციათა კლასის რამდენიმე თვისებას მტკიცების გარეშე [113]:

თეორემა. თუ $f \in L_p(\bar{G})$*, ამასთან* $f = 0$ G *-ს გარეთ, მაშინ ყოველი* $\varepsilon > 0$ *-სათვის მოიპოვება ისეთი* $\delta(\varepsilon) > 0$*, რომ*

$$\left(\iint_G |f(z + \Delta z) - f(z)|^p \, dxdy \right)^{1/p} < \varepsilon, \text{ თუ } |\Delta z| < \delta(\varepsilon). \tag{1.13}$$

ამ თვისებას ვუწოდებთ $f \in L_p(\bar{G})$ ფუნქციის უწყვეტობას L_p მეტრიკის აზრით. ვიტყვით, რომ $L_p(\bar{G})$ კლასის ფუნქციათა სიმრავლე თანაბრად უწყვეტია L_p მეტრიკის აზრით, თუ (1.13) პირობაში $\delta(\varepsilon)$ არ არის დამოკიდებული ამ სიმრავლის ელემენტების არჩევაზე.

თეორემა. ვთქვათ $L_p(\bar{G})$, $p>1$ *კლასის ფუნქციათა* f_n *მიმდევრობა ძლიერად იკრიბება* $f \in L_p(\bar{G})$ *ფუნქციისაკენ:*

$$\|f - f_n\|_{L_p(\bar{G})} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

მაშინ: 1) f_n *მიმდევრობა სუსტად იკრიბება* f *ფუნქციისაკენ, ე.ი.*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G f_n g \, dxdy = \iint_G fg \, dxdy, \tag{1.14}$$

სადაც g *-ნებისმიერი ფუნქციაა* $L_q(\bar{G})$, $q=\dfrac{p}{p-1}$ *ფუნქციათა კლასიდან;*

2) f_n *მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ* f_{n_k} *ქვემიმდევრობა, რომელიც იკრიბება იკრიბება* f *ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან* G *-ში.*

$L_p(\bar{G})$ კლასის ფუნქციათა სიმრავლეს ეწოდება კომპაქტური, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო მიმდევრობა შეიცავს ქვემიმდევრობას, რომელიც ძლიერად იკრიბება (L_p მეტრიკით) ამ სიმრავლის ელემენტისაკენ.

თეორემა. $L_p(\bar{G})$ *კლასის ფუნქციათა სიმრავლის კომპაქტურობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს თანაბრად შემოსაზღვრულობა და თანაბრად უწყვეტობა (*L_p *მეტრიკის აზრით).*

$L_p(\bar{G})$ კლასის ფუნქციათა სიმრავლეს ეწოდება სუსტად კომპაქტური, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო მიმდევრობა შეიცავს ქვემიმდევრობას, რომელიც სუსტად იკრიბება (L_p მეტრიკით) ამ სიმრავლის რომელიმე ელემენტისაკენ.

თეორემა. $L_p(\bar{G})$ *კლასის ფუნქციათა სიმრავლის სუსტად კომპაქტურობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს ამ სიმრავლის თანაბრად შემოსაზღვრულობა (*L_p *მეტრიკის აზრით).*

აღსანიშნავია, რომ $L_p(\bar{G})$ სივრცის ელემენტების სუსტად კრებადობიდან, ზოგადად რომ ვთქვათ, არ გამომდინარეობს ძლიერად კრებადობა. მაგრამ არსებობს $L_p(\bar{G})$-ს ქვესივრცე, სადაც ძლიერად და სუსტად კრებადობა ერთიდაიგივეა.

ვთქვათ $f \in L_p(\bar{G})$, $f=0$ G-ს გარეთ და

$$\left(\iint_G |f(z+\Delta z) - f(z)|^p \, dxdy\right)^{1/p} < B|\Delta z|^\alpha, \quad 0<\alpha \le 1, \tag{1.15}$$

სადაც Δz - ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია, ხოლო B - მუდმივა, რომელიც Δz-ზე არაა დამოკიდებული. იმ B - მუდმივებს შორის უმცირესს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15) უტოლობას, აღვნიშნავთ $B(f)$-ით. აშკარაა,

$$B(f) = \sup \frac{\left(\iint_G |f(z+\Delta z) - f(z)|^p \, dxdy\right)^{1/p}}{|\Delta z|^\alpha}, \tag{1.16}$$

ამასთან აქ α, p, G ფიქსირებულია, ხოლო Δz ღებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას. (1.15) უტოლობაში B-ს ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ $B(f)$, მაგრამ არ შეიძლება ავიღოთ $B(f)$-ზე ნაკლები მუდმივა. ცხადია, (1.16) სიდიდე

დამოკიდებულია არა მარტო f-ზე, არამედ G არეზე და α და p მუდმივებზე. ამიტომაც $B(f)$-ის ნაცვლად ზოგჯერ გამოიყენება ჩანაწერი $B(f,G,\alpha,p)$.

$L_p^{\alpha}(\bar{G})$-ით აღვნიშნოთ იმ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15) უტოლობას. თუ $L_p^{\alpha}(\bar{G})$ სიმრავლის f ელემენტისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$\|f\|_{L_p^{\alpha}(\bar{G})} = \|f\|_{L_p(\bar{G})} + B(f,G,\alpha,p), \tag{1.17}$$

მაშინ მივიღებთ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეს.

თუ G - შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაშინ, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$C_{\alpha}^{m}(\bar{G}) \subset C^{m}(\bar{G}) \subset L_p(\bar{G}) \subset L_{p'}(\bar{G})$$

$$(m \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad p > p' \geq 1).$$

შემოუსაზღვრელი სიმრავლის შემთხვევაში ბოლო ორი თანაფარდობა, ზოგადად, არ სრულდება. ამიტომაც შემოუსაზღვრელი სიმრავლის შემთხვევაში მიზანშეწონილია განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლეები: 1) $L_pC_{\alpha}^{m}(\bar{G})$ - $L_p(\bar{G})$ და $C_{\alpha}^{m}(\bar{G})$ სიმრავლეების თანაკვეთა. 2) $L_pC_{p'}(\bar{G})$ - $L_p(\bar{G})$ და $C_{p'}(\bar{G})$ სიმრავლეების თანაკვეთა. თუ ამ სიმრავლეების ელემენტებისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად

1) თუ $f \in L_pC_{\alpha}^{m}(\bar{G})$, მაშინ $\|f\|_{L_pC_{\alpha}^{m}(\bar{G})} = \|f\|_{L_p(\bar{G})} + \|f\|_{C_{\alpha}^{m}(\bar{G})}$,

2) თუ $f \in L_pL_{p'}(\bar{G})$, მაშინ $\|f\|_{L_pL_{p'}(\bar{G})} = \|f\|_{L_p(\bar{G})} + \|f\|_{L_{p'}(G)}$, (1.18)

მაშინ მივიღებთ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეებს.

4.2. წირების და არეების ზოგიერთი კლასი

ვთქვათ Γ - რომელიმე მარტივი ჩაკეტილი ან არაჩაკეტილი გაწრფევადი ჟორდანის წირია. მაშინ ამ წირის განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$z(s) = x(s) + iy(s), \tag{2.1}$$

სადაც $z(s)$ არის Γ წირის წერტილების აფიქსი, რომელიც შეესაბამება s რკალის სიგრძეს (რკალის სიგრძე აითვლება Γ წირის რომელიმე ფიქსირებული წერტილიდან). ვთქვათ ℓ არის Γ წირის სიგრძე. რკალის სიგრძის ათვლის წერტილი ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ ისე რომ, რომ შესრულდეს $0 \leq s \leq \ell$ პირობა.

ფუნქცია $z(s)$ უწყვეტია $0 \le s \le \ell$ შუალედში. ამასთან, თუ Γ ჩაკეტილი წირია, მაშინ $z(0) = z(\ell)$. ამიტომაც ჩაკეტილი წირის შემთხვევაში $z(s)$ წარმოადგენს პერიოდულ ფუნქციას ამ წირის სიგრძის ტოლი პერიოდით.

ვიტყვით, რომ Γ წირი ეკუთვნის C^m კლასს, თუ $z(s)$ ფუნქციის ყველა წარმოებული m რიგის ჩათვლით უწყვეტია $0 \le s \le \ell$ სეგმენტზე. ასევე, თუ m რიგის $z^m(s)$ წარმოებული $0 \le s \le \ell$ სეგმენტზე აკმაყფილებს ჰელდერის პირობას α, $0 < \alpha \le 1$ მაჩვენებლით, მაშინ ვიტყვით, რომ $\Gamma \in C_\alpha^m$.

თუ $z(s)$ - ანალიტიკური ფუნქციაა, მაშინ Γ-ს ვუწოდებთ ანალიტიკურ წირს. ასეთ წირთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $\mathfrak{R}$-ით.

თუ G არის საზღვარი შედგება სასრული რაოდენობის მარტივი ჩაკეტილი ან არაჩაკეტილი განწრფევადი ჟორდანის წირებისაგან, რემლებსაც არ გააჩნია ერთმანეთს შორის საერთო წერტილი, მაშინ ვიტყვით, რომ G მიეკუთვნება C კლასს. თუ ეს წირები ყველა ჩაკეტილია და მიეკუთვნება C^m კლასს, მაშინ ვიტყვით, რომ G მიეკუთვნება C^m კლასს. თუ ეს წირები ყველა ჩაკეტილია და მიეკუთვნება ანალიტიკურ ფუნქციათა $\mathfrak{R}$ კლასს, მაშინ ვიტყვით, რომ G მიეკუთვნება $\mathfrak{R}$ კლასს.

ვთქვათ ჟორდანის განწრფევად მარტივ Γ წირზე მოცემულია $f(z)$ ფუნქცია $z \in \Gamma$ წერტილისათვის. $z = z(s)$ გათვალისწინებით, შეიძლება განვიხილოთ ეს ფუნქცია, როგორც s-ის (რკალის სიგრძის) ფუნქცია და აღვნიშნოთ $f(s)$-ით. თუ $f(s)$ და მისი ყველა წარმოებული m რიგის ჩათვლით უწყვეტია $0 \le s \le \ell$ სეგმენტზე, ვიტყვით, რომ Γ წირი ეკუთვნის $C^m(\Gamma)$ კლასს. გარდა ამისა, თუ $f^{(m)}(s)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას α, $0 < \alpha \le 1$ მაჩვენებლით, მაშინ ვიტყვით, რომ $f \in C_\alpha^m(\Gamma)$.

$C^m(\Gamma)$ და $C_\alpha^m(\Gamma)$ სიმრავლეები იქნებიან ბანახის ტიპის სივრცეები, თუ ამ სიმრავლეების ელემენტების ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი სახით:

$$\|f\|_{C^m(\Gamma)} = \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial s^k} \right\|_{C(\Gamma)} , \text{ თუ } f \in C^m(\Gamma) ,$$

$$\|f\|_{C_\alpha^m(\Gamma)} = \|f\|_{C^m(\Gamma)} + H\left(\frac{d^m f}{ds^m}, \Gamma, \alpha \right), \text{ თუ } f \in C_\alpha^m(\Gamma) ,$$

სადაც

$$\|f\|_{C(\Gamma)} \equiv \max_{t\in[0,\ell]}|f(t)| \equiv \max_{t\in[0,\ell]}|f(t)|,\ H(f,\Gamma,\alpha) \equiv \sup_{\substack{t_1,t_2\in[0,\ell]\\ t_1\neq t_2}} \frac{|f(t_1)-f(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}.$$

4.3. კოშის ტიპის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება.

განვიხილოთ კოშის ტიპის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება.

თეორემა. ვთქვათ $G\in C_\alpha^{m+1}$, *ხოლო* $f\in C_\alpha^m(\Gamma)$, *სადაც* Γ - G *-ს საზღვარია,* $\Gamma\in C_\alpha^{m+1}$, $0<\alpha<1$, $m\geq 0$. *მაშინ*

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} \tag{3.1}$$

კოშის ტიპის ინტეგრალი ეკუთვნის $C_\alpha^m(G+\Gamma)$ *კლასს.*

ასევე ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$\|\Phi\|_{C_\alpha^m(\bar G)} \leq M\|f\|_{C_\alpha^m(\Gamma)}, \quad (M=\mathrm{const}).$$

$m=0$ - სათვის მოთხოვნა არესთან მიმართებაში შეიძლება შევამციროთ, კერძოდ სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. ვთქვათ $G\in C^1$ *და* $f\in C_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$. *მაშინ* $\Phi(z)\in C_\alpha^m(G+\Gamma)$. *ასევე ადგილი აქვს შეფასებას*

$$\Phi'(z)<\|f\|_{C_\alpha(\Gamma)}\delta^{\alpha-1},\quad 0<\alpha<1, \tag{3.1}$$

სადაც δ *არის მანძილი* z *წერტილიდან* G *არის საზღვრამდე.*

ბოლო უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi'(z)<L_p(\bar G)$, სადაც p – ნებისმიერი რიცხვია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$1<p<\frac{1}{1-\alpha},$$

საიდანაც ცხადად ჩანს, რომ

$$\|\Phi'\|_{L_p(\bar G)} \leq M\|f\|_{C_\alpha(\Gamma)} \quad (M=\mathrm{const}).$$

ამის გათვალისწინებით ბოლო თეორემის პირობებში გვექნება:

$$\|\Phi^{(m+1)}\|_{L_p(\bar G)} \leq M\|f\|_{C_\alpha^m(\Gamma)}.$$

განვიხილოთ კოში-რიმანის არაერთგვაროვანი სისტემა

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=g(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=g(x,y) \tag{4.1}$$

სადაც g, h - ნამდვილი x და y ცვლადების ნამდვილი ფუნქციებია. ეს სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}=f,\ \ f=\frac{g+ih}{2},\ \ w{=}u{+}iv, \tag{4.2}$$

სადაც

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}\equiv \partial_{\bar z}w\equiv w_{\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{4.3}$$

ასევე განიხილება შემდეგი ოპერაცია

$$\frac{\partial w}{\partial z}\equiv \partial_{z}w\equiv w_{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{4.4}$$

$\partial_{\bar z}w$ და $\partial_z w$ სიდიდეებს ვუწოდებთ w-ს კერძო წარმოებულებს შესაბამისად $\bar z$ და z-ის მიმართ. ადვილი დასანახია, რომ x და y-ის მიმართ წარმოებულები გამოისახება ფორმულებით

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \bar z},\ \frac{\partial w}{\partial y}=i\frac{\partial w}{\partial z}+i\frac{\partial w}{\partial \bar z}.$$

თუ $\partial_{\bar z}$ და ∂_z ოპერაციებს გამოვიყენებთ $\Phi(z)$ ანალიტიკური ფუნქციისათვის, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar z}=0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}=\Phi'(z). \tag{4.5}$$

პირველი ტოლობა წარმოადგენს კოში-რიმანის კომპლექსურ ჩანაწერს, ხოლო მეორე წარმოადგენს ანალიტიკური ფუნქციის წარმოებულს კომპლექსური არგუმენტით. თუ $w\in C^1(G)$, ხოლო $\Phi\in \Re_0(G)$, მაშინ, ცხადია რომ

$$\partial_{\bar z}(\Phi w)=\Phi\partial_{\bar z}w,\ \partial_z(\bar\Phi w)=\bar\Phi\partial_z w. \tag{4.6}$$

ვთქვათ $G\in C$, ხოლო $w\in C^1(\bar G)$. მაშინ გრინის ფორმულების დახმარებით ადვილად მიიღება თანაფარდობა

$$\begin{aligned}\iint_G \frac{\partial w}{\partial \bar z}dxdy&=\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)dz,\\ \iint_G \frac{\partial w}{\partial z}dxdy&=-\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)d\bar z.\end{aligned} \tag{4.7}$$

ადვილი დასანახია, რომ ეს ტოლობები ძალაში რჩება, როცა $w \in C^1(G)$ და უწყვეტია ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეში.

თუ w უწყვეტია $\overline{G}$ არეში და G-ში აკმაყოფილებს (4.2) განტოლებას, მაშინ

$$w(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z} \equiv \Phi(z) + Tf\,, \tag{4.8}$$

სადაც

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,, \quad Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}. \tag{4.9}$$

4.4. განზოგადოებული წარმოებული სობოლევის აზრით

განვიხილოთ ფუნქციათა ზოგიერთი კლასი, რომლებიც უშვებენ წარმოებულის განზოგადოებას რომელიმე აზრით.

ლემა. ვთქვათ $f \in L_p(\overline{G})$, $f = 0$ G*-ს გარეთ. მაშინ*

$$g(z) = \iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{|\zeta - z|^\lambda} = \iint_E \frac{f(\zeta + z)d\xi d\eta}{|\zeta|^\lambda}, \quad \lambda<2\,, \tag{5.1}$$

ფუნქცია უწყვეტია მთელს სიბრტყეზე, თუ $p > \dfrac{2}{2-\lambda}$*.*

თეორემა. ვთქვათ G *შემოსაზღვრული სიმრავლეა. თუ* $f \in L_1(\overline{G})$*, მაშინ*

$$\begin{aligned} T_G f \equiv Tf &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}, \\ \overline{T}_G f \equiv \overline{T} f &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \end{aligned} \tag{5.2}$$

ინტეგრალები არსებობენ ყოველი z *წერტილისათვის* $\overline{G}$*-ს გარეთ, საიდანაც* Tf *და* $\overline{T}f$ *ჰოლომორფულებია შესაბამისად* z*-თან და* $\overline{z}$*- თან მიმართებაში* $\overline{G}$*-ს გარეთ და უსასრულობაში მიისწრაფვიან ნულისაკენ.*

თეორემა. ვთქვათ G *შემოსაზღვრული სიმრავლეა. თუ* $f \in L_1(\overline{G})$*, მაშინ* Tf *და* $\overline{T}f$ *როგორც* G *არის* z *წერტილის ფუნქციები არსებობენ თითქმის ყველგან და მიეკუთვნებიან ნებისმიერ* $L_p(\overline{G}_*)$ *კლასს, სადაც* p *ნებისმიერი რიცხვია, რომელიც აკმაყოფილებს* $1 \le p < 2$ *პირობას, ხოლო* G_* *- სიბრტყის ნებისმიერი შემოსაზღვრული სიმრავლეა.*

განსაზღვრება. ვთქვათ f, $g \in L_1(G)$*. თუ* f *და* g *აკმაყოფილებენ*

$$\iint_G g\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}dxdy + \iint_G f\varphi dxdy = 0 \quad \left(\iint_G g\frac{\partial\varphi}{\partial z}dxdy + \iint_G f\varphi dxdy = 0\right) \tag{5.3}$$

თანაფარდობას, სადაც φ *-* $D_1^0(G)$ *კლასის ნებისმიერი ფუნქციაა, მაშინ ვიტყვით, რომ* f *არის* g *-ს განზოგადოებული წარმოებული* $\bar z$ *-ით (*z *-ით).*

შემდეგისათვის განზოგადოებულ წარმოებულებს $\bar z$-ით და z-ით შესაბამისად აღვნიშნავთ $\partial_{\bar z}$-ით და ∂_z-ით [118]. ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც უშვებენ $\partial_{\bar z}$-ით და ∂_z-ით წარმოებულებს, აღნიშნავენ შესაბამისად $D_{\bar z}(G)$-ით და $D_z(G)$-ით

თეორემა. თუ $g \in L_1(G)$ *და* $\partial_{\bar z} g = 0$*, მაშინ* $g(z)$ *ჰოლომორფულია* G *-ს შიგნით.*

თეორემა. თუ $\partial_z f \in D_{\bar z}(G)$*, ე.ი. არსებობს* $\partial_z\left(\partial_{\bar z} f\right)$*, მაშინ არსებობს ასევე* $\partial_{\bar z}\left(\partial_z f\right)$ *და* $\partial_{\bar z}\left(\partial_z f\right) = \partial_z\left(\partial_{\bar z} f\right)$*.*

4.5. T_G ოპერატორის თვისებები

განვიხილოთ T_G ოპერატორის თვისებები ფუნქციათა ზოგიერთი კლასისათვის [76].

თეორემა. ვთქვათ G *შემოსაზღვრული სიმრავლეა. თუ* $f \in L_p(\bar G)$*,* $p > 2$*, მაშინ* $g = T_G f$ *ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს*

$$|g(z)| \le M_1 \|f\|_{L_p(\bar G)}, \quad z \in E, \tag{6.1}$$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le M_2 \|f\|_{L_p(\bar G)} |z_1 - z_2|^\alpha, \quad \alpha = \frac{p-2}{p}, \tag{6.2}$$

სადაც z_1 *და* z_2 *სიბრტყის რაიმე წერტილებია, ხოლო* M_1 *და* M_2 *- მუდმივებია, საიდანაც* M_1 *დამოკიდებულია* p *-სა და* G *-ზე, ხოლო* M_2 *დამოკიდებულია მხოლოდ* p *-ზე.*

(6.1) და (6.2) უტოლობები გვიჩვენებს, რომ T_G - წრფივი სავსებით უწყვეტი ოპერატორია $L_p(\bar G)$ სივრცეში, რომელიც ამ სივრცეს ასახავს $C_\alpha(\bar G)$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$ სივრცეზე, საიდანაც

$$\|T_G f\|_{C_\alpha(\overline{G})} \le M\|f\|_{L_p(\overline{G})}, \quad \alpha = \frac{p-2}{p}, \quad p > 2. \tag{6.3}$$

ვთქვათ $f \in C(\overline{G})$, $p > 2$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ადგილი აქვს

$$|g(z)| \le M\|f\|_{C(\overline{G})},$$
$$|g(z_1) - g(z_2)| \le M\|f\|_{C(\overline{G})}|z_1 - z_2|\lg\frac{2d}{|z_1 - z_2|}, \tag{6.4}$$

უტოლობებს, სადაც d - G-ს დიამეტრია.

ამ უტოლობებიდან ჩანს, რომ T_G ოპერატორი სავსებით უწყვეტია $C(\overline{G})$ სივრცეში.

4.6. სობოლევის სივრცე

შემოვიღოთ აღნიშვნები [95].

E_n - n განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე;

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - რაიმე წერტილი E_n სივრცეში;

G - შემოსაზღვრული სიმრავლე E_n-ში;

Γ - G-ს საზღვარი;

$\overline{G}$ - G-ს ჩაკეტვა ($\overline{G} = G \cup \Gamma$);

$L_p(\overline{G})$-ით აღვნიშნავთ G არეში ზომად და მოდულით p რიგამდე ინტეგრირებად ფუნქციათა სიმრავლეს. თუ $L_p(\overline{G})$ სიმრავლის u ელემენტისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$\|u\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, \tag{7.1}$$

მაშინ მივიღებთ $L_p(G)$ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეს.

$\bigcap_{p\ge 1} L_p(G)$ ქვესიმრავლეს, რომელიც შედგება არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციებისაგან (ე.ი. ისეთი $u(x)$ ფუნქციებისაგან, რომელთაგან ყოველისათვის არსებობს M მუდმივა, რომ $|u(x)| \le M$ $x \in G$-თვის), აღვნიშნავთ $L_\infty(G)$-ით. $L_\infty(G)$ - ბანახის ტიპის ნორმირებული სივრცეა

$$\|u\|_{L_\infty(G)} = \text{vrai}\ \sup_{x\in G}|u(x)| \tag{7.1}$$

ნორმით.

ვთქვათ G-ში უწყვეტ $u(x)$ ფუნქციას გააჩნია G-ში უწყვეტი $u_{x_i}(x)$ წარმოებული. მაშინ ყოველი $g(x)\in C_0^1(\bar{G})$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს

$$\int_G u(x)\overline{g_{x_i}(x)}dx = -\int_G f_{x_i}(x)\overline{g(x)}dx \qquad (7.2)$$

ტოლობას.

როგორც ამ ტოლობიდან ჩანს $u(x)$ ფუნქციის $u_{x_i}(x)$ წარმოებული სრულად განისაზღვრება: ადვილი დასანახია, რომ თუ $u(x)\in C^1(G)$ ფუნქციისათვის არსებობს $h(x)\in C(G)$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი $g(x)\in C_0^1(\bar{G})$-სათვის ადგილი აქვს

$$\int_G u(x)\overline{g_{x_i}(x)}dx = -\int_G h_i(x)\overline{g(x)}dx \qquad (7.3)$$

ტოლობას, მაშინ $h_i(x)$, $x\in G$, ფუნქცია წარმოადგენს $u(x)$ ფუნქციის $u_{x_i}(x)$ წარმოებულს.

თუ (7.2) ტოლობაში $u(x)$ და $h_i(x)$ ფუნქციების უწყვეტობის ნაცვლად მოვითხოვთ მათ ინტეგრებადობას, მაშინ მივალთ სობოლევის აზრით განზოგადოებული წარმოებულის ცნებაზე.

ვთქვათ $k=(k_1,...,k_n)$ არის მთელ არაუარყოფით ელემენტებიანი ვექტორი. $u^k(x)\in L_1(G)$ ფუნქციას ეწოდება $u(x)\in L_1(G)$ ფუნქციის k-ური რიგის განზოგადოებული წარმოებული, თუ ყოველი $g(x)\in C_0^{|k|}(G)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_G u(x)\overline{D^k g(x)}dx = -1^{|k|}\int_G u^k(x)\overline{g(x)}dx\,. \qquad (7.4)$$

მოვიყვანოთ განზოგადოებულ წარმოებულთან დაკავშირებული რამდენიმე დებულება.

თუ u_i, i=1, 2 ფუნქციას აქვს $D^k u_i$, i=1, 2 განზოგადოებული წარმოებული, მაშინ $u=C_1u_1+C_2u_2$ ფუნქციას ნებისმიერი C_1, C_2 მუდმივებისათვის აქვს $D^k u = C_1D^k u_1 + C_2 D^k u_2$ განზოგადოებული წარმოებული.

$u(x)=|x_1|$ ფუნქციას n განზომილებიან $\{|x|<1\}$ სფეროში აქვს განზოგადოებული წარმოებული $u_{x_1}(x)=\operatorname{sgn}x_1$ და $u_{x_i}(x)=0$, i=2,...,n.

$u(x)=\operatorname{sgn} x_1$ ფუნქციას n განზომილებიან $\{|x|<1\}$ სფეროში $u_{x_1}(x)$ განზოგადოებული წარმოებული არ აქვს, ხოლო დანარჩენი ცვლადების მიმართ განზოგადოებული წარმოებული არსებობს და $u_{x_1}(x)=0,\ i=2,...,n$.

u ფუნქციის $D^k u$ განზოდადოებული წარმოებული, ჩვეულებრივი წარმოებულისაგან განსხვავებით, პირდაპირ განისაზღვრება $|k|$ რიგით შესაბამისი დაბალი რიგის წარმოებულების არსებობის მოთხოვნის გარეშე. მაგ: $u(x)=\operatorname{sgn} x_1+\operatorname{sgn} x_2$ ფუნქციას n განზომილებიან $\{|x|<1\}$ სფეროში გააჩნია $u_{x_1 x_2}=0$ განზოგადოებული წარმოებული, მაგრამ არ გააჩნია u_{x_1} და u_{x_2} განზოგადოებული წარმოებულები.

მტკიცდება ასევე რომ, თუ u ფუნქციას გააჩნია $D^k u$ განზოგადოებული წარმოებული G_1 და G_2 არეებში და $G=G_1+G_2$ ასევე არეა, მაშინ $D^k u$ არსებომს ასევე G არეშიც.

$D^k u(x)$, სადაც $k=(k_1,...,k_n),\ k_i\geq 0$ მულტიინდექსია, აღნიშნავს $u(x)$ ფუნქციის წარმოებულს $\dfrac{\partial^{|k|}u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ სახით, სადაც $|k|=k_1+k_2+...+k_n$ გაწარმოების რიგია.

$W_p^m(\bar{G})$-ით აღვნიშნავთ $L_p(\bar{G})$ სივრცის იმ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებსაც გააჩნიათ ყველა სახის $D^k f,\ |k|\leq l$ განზოგადოებული წარმოებულები $L_p(\bar{G})$ სივრციდან.

თუ $W_p^m(G)$ ($m=0$-სათვის $W_p^0(G)=L_p(G)$) სიმრავლის u ელემენტისათვის ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$\|u\|_{W_p^m(G)}=\left(\int_G\sum_{|k|=0}^{m}\left|D^k u(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\equiv\left(\sum_{|k|=0}^{m}\left\|D^k u(x)\right\|_{L_p(G)}^p\right)^{1/p}, \qquad (7.5)$$

მაშინ მივიღებთ ბანახის ტიპის სრულ ნორმირებულ სივრცეს.

$\overset{0}{W}{}_2^1(G)$-ით აღვნიშნავთ $W_2^1(G)$-ის ქვესივრცეს, რომელშიც მკრივ სიმრავლეს წარმოადგენს $\bar{G}$-ში ყველა დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომლებიც მიისწრაფვიან ნულისაკენ $\Gamma=\partial G$-ზე.

თავი I. ოპტიმალური მართვის ამოცანა კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ბიწაძე სამარსკის სასაზღვრო პირობით

1. განზოგადოებული ამონახსნის არსებობა

ვთქვათ G კომპლექსური E სიბრტყის შემოსაზღვრული სიმრავლეა Γ საზღვრით, რომელიც თავის მხრივ არის ლიაპუნოვის ჩვეულებრივი ჩაკეტილი წირი. γ აღვნიშნოთ Γ საზღვრის ნაწილი, რომელიც თავის მხრივ წარმოადგენს ლიაპუნოვის გახსნილ წირს პარამეტრული განტოლებით $z = z(s)$, $0 \le s \le \delta$. ვთქვათ γ_0 დიფეომორფულია γ–ის $z_0 = I(z)$ ასახვით, მდებარეობს G არეში და მოცემულია $z_0 = z_0(s)$, $0 \le s \le \delta$ პარამეტრული განტოლებით. დავუშვათ, რომ γ_0 კვეთს Γ-ს, მაგრამ არ ეხება მას, $z = x + iy \in G$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$- სობოლევის განზოგადოებული წარმოებულია [76], [77], [95].

$\overline{G}$ არეში განვიხილოთ ბიწაძე-სამარსკის [73] სასაზღვრო ამოცანა პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$\partial_{\bar{z}} w = f(z, w, \bar{w}), \quad z \in G, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{Re}[w(z)] = \varphi_1(z), \quad z \in \Gamma \setminus \gamma, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Re}[w(z(s))] = \sigma\,\mathrm{Re}[w(z_0(s))], \ z(s) \in \gamma, \ z_0(s) \in \gamma_0, \ 0 \le s \le \delta, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Im}[w(z^*)] = c, \quad z^* \in \Gamma \setminus \gamma, \quad 0 < \sigma = \mathrm{const}. \tag{1.4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

(A1). $f(z, w, \bar{w})$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგი პირობების გათვალისწინებით $z \in G, |w| < R$, $f(z,0,0) \in L_p(\overline{G}),\ p > 2$ და $|f(z, w, \bar{w}) - f(z, w_0, \bar{w}_0)| \le L(|w - w_0| + |w - \bar{w}_0|)$.

(**A2**). $\varphi_1(z) \in C_\mu(\Gamma \setminus \gamma)$, $\varphi_2(z) \in C_\mu(\gamma),\ \mu > 1/2$, რომელთა გათვალისწინებით $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ ფუნქციების მნიშვნელობები γ და γ_0 კონტურების ბოლოებზე შესაბამისად ემთხვევიან.

(1.1)-(1.4) ამოცნის ამონახსნის არსებობის დამტკიცებისათვის განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი:

$$\partial_{\bar{z}} w_n = f(z, w_n, \bar{w}_n), \quad z \in G, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Re}[w_n(z)] = \varphi_1(z), \quad z \in \Gamma \setminus \gamma, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{Re}[w_n(z(s))] = \sigma \operatorname{Re}[w_{n-1}(z_0(s))], \ z(s) \in \gamma, \ z_0(s) \in \gamma_0 \tag{1.7}$$

$$\operatorname{Im}[w_n(z^*)] = c, \ z^* \in \Gamma \setminus \gamma, \ 0 \le s \le \delta, \ n = 1, 2, 3, \dots \ , \tag{1.8}$$

სადაც $w_0(z)$ - ნებისმიერი ფუნქციაა $C_\alpha(\gamma)-$დან $\alpha > \frac{1}{2}$, უწყვეტად $\varphi_1(z)$ -ის ფუნქციიის მნიშვნელობებზე γ კონტურის ბოლოებში.

განვიხილოთ ფუნქცია $v_n = w_{n+1} - w_n$, მაშინ (1.5)-(1.8)-დან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია v_n არის შემდეგი ამოცანის ამუნახსნია:

$$\partial_{\bar{z}} v_n = f(z, w_{n+1}, \bar{w}_{n+1}) - f(z, w_n, \bar{w}_n) \equiv F(z, w_n, \bar{w}_n, w_{n+1}, \bar{w}_{n+1}), \quad z \in G, \tag{1.9}$$

$$\operatorname{Re}[v_n(z)] = 0, \ z \in \Gamma \setminus \gamma, \tag{1.10}$$

$$\operatorname{Re}[v_n(z(s))] = \sigma \operatorname{Re}[v_{n-1}(z_0(s))], \ z(s) \in \gamma, \ z_0(s) \in \gamma_0, \ 0 \le s \le \delta, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{Im}[v_n(z^*)] = 0, \ z^* \in \Gamma \setminus \gamma, \ n = 1, 2, 3, \dots \ . \tag{1.12}$$

ყოველი $n \in N$-სათვის (1.9)-(1.12) ამოცანა თავისთავად წარმოადგენს დირიხლეს ამოცანას [76], [101]. ამ ნაშრომებზე დაყრდნობით (1.9)-(1.12) ამოცანის ამონახსნი შეიძლება დავიყვანოთ შემდეგ არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$v^*(z) = \psi_n(z) + \phi_n(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{F(\zeta, w_n(\zeta), \bar{w}_n(\zeta), w_{n+1}(\zeta), \bar{w}_{n+1}(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta \tag{1.13}$$

სადაც $\zeta = \xi + i\eta$, $\psi_n(z)$- ჰომომორფული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.10)-(1.12) პირობებს, ხოლო $\phi_n(z)$ ისეთი ჰოლომორფული ფუნქციაა, რომ სხვაობა

$$\phi_n(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{F(\zeta, w_n, \bar{w}_n, w_{n+1}, \bar{w}_{n+1})}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს და აპრიორულ შეფასებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\|\phi_n\|_{C_\alpha(\bar{G})} \le C_1 \|F\|_{L_p(\bar{G})}, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

(1.13) განტოლების მარჯვენა მხარეში მდებარე ინტეგრალური ოპერატორი აღვნიშოთ T_G-თი. შევნიშნავთ, რომ ოპერატორი T_G გადასახავს $L_p(\overline{G})$ სივრცეს $C_\beta(\overline{G})$, $\beta=(p-2)/p<\alpha$ -ში [76].

ვთქვათ სრულდება შემდეგი პირობები:

(A3). არსებობს ისეთი $R_1>0$, $R_1\le R$ რიცხვი, რომ სრულდება უტოლობა

$$\|\psi_n\|_{C_\alpha(\overline{G})}+\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)\left(2L\,|\,G\,|^{1/p}\,R_1\right)\le R_1.$$

(A4). $$2\,|\,G\,|^{1/p}\,L\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)<1.$$

ვთქვათ სრულდება (A1)-(A4) პირობები, მაშინ არსებობს (1.9)-(1.12) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $\|v_n\|_{C_\alpha(\overline{G})}\le R_1$ სფეროში [101].

(1.13) ტოლობიდან შევაფასოთ $v_n(z)$ ფუნქცია $C(\overline{G})$ სივრცის მეტრიკით:

$$\|v_n\|_{C(\overline{G})}\le\|\psi_n\|_{C(\overline{G})}+\|\phi_n\|_{C(\overline{G})}+\|T_G[F]\|_{C(\overline{G})} \qquad (1.14)$$

წინამდებარე შეფასების გამოყენებით (1.14) უტოლობიდან მივიღებთ:

$$\|v_n\|_{C(\overline{G})}\le\|\psi_n\|_{C(\overline{G})}+\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)\|F\|_{L_p(\overline{G})} \qquad (1.15)$$

(A1) წინადადების ძალით გვექნება

$$|\,F(z,w_n,\overline{w}_n,w_{n+1},\overline{w}_{n+1})\,|=|\,f\,(z,w_{n+1},\overline{w}_{n+1})-f\,(z,w_n,\overline{w}_n)\,|\le 2L\,|\,w_{n+1}-w_n\,|=2L\,|\,v_n\,|.$$

(A1) წინადადების გათვალისწინებით ბოლო უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $F(z,w_n,\overline{w}_n,w_{n+1},\overline{w}_{n+1})$ რთული ფუნქცია ეკუთვნის $L_p(\overline{G})$ სივრცეს. მაშინ

$$\|F\|_{L_p(\overline{G})}\le 2L\|v_n\|_{L_p(\overline{G})}\le 2L\,|\,G\,|^{1/p}\,\|v_n\|_{C(\overline{G})}.$$

ასე, რომ (1.15) უტოლობიდან შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$\|v_n\|_{C(\overline{G})}\le\|\psi_n\|_{C(\overline{G})}+2L\,|\,G\,|^{1/p}\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)\|v_n\|_{C(\overline{G})},$$

(A4) პირობის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\|v_n\|_{C(\overline{G})}\le\frac{\|\psi_n\|_{C(\overline{G})}}{1-2L\,|\,G\,|^{1/p}\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)} \qquad (1.16)$$

აღვნიშნოთ, რომ $\psi_n(z)$ ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამონახსნს:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\overline{Z}}\psi_n(z)=0,\ \ z\in G,\\
&\mathrm{Re}[\psi_n(z)]=0,\ \ \ z\in \Gamma\setminus\gamma,\\
&\mathrm{Re}[\psi_n(z)]=\sigma\,\mathrm{Re}[\psi_{n-1}(z_0)],\ \ \ z\in\gamma,\ \ \ z_0\in\gamma_0,\\
&\mathrm{Im}[\psi_n(z^*)]=0,\ \ \ n=1,2,3,\dots\ ,\\
&\psi_0(z)=w_1(z)-w_0(z).
\end{aligned}
$$

რადგანაც $\mathrm{Re}[\psi_n(z)]$ ჰარმონიული ფუნქციაა, ამიტომაც მისთვის სრულდება შვარცის ლემის [94], [123] ყველა პირობა და არსებობს ψ_n-ისგან დამოუკიდებელი ისეთი $0<q<1$, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი უტოლობა [81]:

$$
\|\psi_n\|_{C(\overline{G})}\le Mq^n,
$$

სადაც $M>0$ - მუდმივია და დამოკიდებულია მხოლოდ $\varphi_1(z)$-ზე.

ამ შეფასების გათვალისწინებით, (1.16)-დან შეიძლება დავწეროთ:

$$
\|v_n\|_{C(\overline{G})}\le\frac{M}{1-2L\,|G|^{1/p}\left(C_1+\|T_G\|_{L_p(\overline{G}),C_\alpha(\overline{G})}\right)}q^n \tag{1.17}
$$

მაშინ (1.17)-დან, შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ მწკრივი იკრიბება თანაბრად ნულისაკენ $\overline{G}$-არეში. აქედან გამომდინარეობს, რომ მწკრივი $\{w_n(z)\}$ ფუნდამენტალურია $C(\overline{G})$-ში და აქვს ზღვარი $w(z)\in C(\overline{G})$.

განვიხილოთ ინტეგრალური წარმოდგენა $w_n(z)$ - ფუნქციისათვის:

$$
w_n(z)=\psi_n'(z)+\phi_n'(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{f(\zeta,w_n,\overline{w}_n)}{\zeta-z}d\xi d\eta, \tag{1.18}
$$

სადაც $\psi_n'(z)$ - ჰოლომორფული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.6)-(1.8) ფუნქციებს, ხოლო $\phi_n'(z)$ - ჰოლომორფული ფუნქციაა ისეთი, რომ სხვაობა

$$
\phi_n'(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{f(\zeta,w_n,\overline{w}_n)}{\zeta-z}d\xi d\eta
$$

აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს.

(1.18) წარმოდგენიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ $w(z)$ არის (1.1)-(1.4) ამოცანის ამონახსნი და $w(z)\in C_\alpha(\overline{G})$. ჰოლომორფული ამონახსნის ერთადერთობიდან და (1.18) ინტეგრალური წარმოდგენიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ეს ამონახსნი ერთადერთია $C_\alpha(\overline{G})$ კლასში.

რითაც დამტკიცდა შემდეგი

*თეორემა_**1**. ვთქვათ სრულდება (A1)-(A4) პირობები, მაშინ (1.1)-(1.4) ამოცანის ამონახსნი არსებობს* $C_\alpha(\overline{G})$ *სივრცეში და ერთადერთია.*

2. წრფივი ამოცანა

$\overline{G}$ არეში პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის განვიხილოთ ბიწაძე-სამარსკის შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}} w = A(z)w + B(z)\overline{w} + d(z), \quad z \in G, \\
&\mathrm{Re}[w(z)] = 0,\ z \in \Gamma \setminus \gamma, \\
&\mathrm{Re}[w(z(s))] = \sigma \,\mathrm{Re}[w(z_0(s))],\ z(s) \in \gamma, \quad z_0(s) \in \gamma_0, \\
&\mathrm{Im}[w(z^*)] = 0,\ z^* \in \Gamma \setminus \gamma, \quad 0 \le s \le \delta.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

დავუშვათ, რომ $A(z),\ B(z),\ d(z) \in L_p(\overline{G}),\ p > 2,\ |A|, |B| \le N$.

$C_\alpha^p(\overline{G})$-თი აღვნიშნოთ ისეთი $w(z) \in C_\mu(\overline{G})$ ფუნქციების სიმრავლე, რომ

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[w(z)] = 0,\ z \in \Gamma \setminus \gamma, \\
&\mathrm{Re}[w(z(s))] = \sigma \,\mathrm{Re}[w(z_0(s))],\ z(s) \in \gamma,\ z_0(s) \in \gamma_0,\ 0 \le s \le \delta, \\
&\mathrm{Im}[w(z^*)] = 0,\ z^* \in \Gamma \setminus \gamma
\end{aligned} \tag{2.2}$$

და აკმაყოფილებს სასრულ ნორმას

$$\| w \|_{C_\alpha^p(\overline{G})} = \| w \|_{C_\alpha(\overline{G})} + \| \partial_{\bar{z}} w \|_{L_p(\overline{G})} < +\infty . \tag{2.3}$$

მარტივად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ $C_\alpha^p(\overline{G})$ სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ ნორმირებულ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა სიბრტყეზე (2.3) ტოლობით განსაზღვრული ნორმით. საიდანაც, თუ $p > q > 2$, მაშინ $C_\alpha^p(\overline{G}) \subset C_\alpha^q(\overline{G})$ და $\| w \|_{C_\alpha^q(\overline{G})} \le \alpha \| w \|_{C_\alpha^p(\overline{G})}$, სადაც α დადებითი მუდმივაა, ხოლო w- ნებისმიერი ელემენტი $C_\alpha^p(\overline{G})$-დან.

ლემა. ნებისმიერი $d(z) \in L_p(\overline{G}),\ p > 2$ *ფუნქციისათვის (2.1) ამოცანის* $w(z)$ *ამონახსნი არსებობს, ეკუთვნის* $C_\alpha^p(\overline{G})$ *სივრცეს და მისთვის სამართლიანია შემდეგი აპრიორული შეფასება:*

$$\| w \|_{C_\alpha^p(\overline{G})} \le \alpha \| d \|_{L_p(\overline{G})}, \tag{2.4}$$

სადაც α- *დადებითი მუდმივაა, რომელიც დამოკიდებულია* $p,\ N$ *-ზე და* $|G| = \mathrm{mes}G$.

დამტკიცება. (2.1) ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა_1-დან. დასამტკიცებელი გვრჩება (2.4) აპრიორული შეფასების სამართლიანობა. (2.1) ამოცანა დავიყვანოთ ინტეგრალურ განტოლებაზე. ამისათვის შემოვიტანოთ შემდეგი ოპერატორი

$$T_G[z,f] = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(t)}{t-z} d\xi d\eta, \; t = \xi + i\eta$$

და $S_G[z,f]$ ოპერატორი $L_p(\overline{G})$-დან ანალიტიკური ფუნქციების ქვესიმრავლეში, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left\{T_G[z,f] + S_G[z,f]\right\} = 0, \; z \in \Gamma \setminus \gamma, \\ &\mathrm{Re}\left\{T_G[z,f] + S_G[z,f]\right\} = \sigma \,\mathrm{Re}\left\{T_G[z_0,f] + S_G[z_0,f]\right\}, \; z_0 \in \gamma_0, \; z \in \gamma, \\ &\mathrm{Im}\left\{T_G[z^*,f] + S_G[z^*,f]\right\} = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

სადაც $z^* \in \Gamma \setminus \gamma$ - ფიქსირებული წერტილია.

ამ პირობებით $S_G[z,f]$ ოპერატორი განისაზღვრება ერთმნიშვნელოვნად. განვსაზღვროთ ოპერატორები

$$\begin{aligned} &P(f) = T_G[z,f] + S_G[z,f], \\ &P_{AB}(f) = P(Af) + P(B\overline{f}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

სადაც $A(z)$ და $B(z)$ ფუნქციები (2.1) განტოლების მარჯვენა მხარიდანაა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\partial_{\overline{z}} P(f) = f(z)$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ (2.1) ამოცანის ამონახსნი აკმაკოფილებს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას.

$$w(z) = P_{AB}(w) + P(d) \tag{2.7}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (2.1) და (2.7) ამოცანები ექვივალენტურია. $T_G[z,f]$ და $P(f)$ ოპერატორების თვისებების [76] გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ რომ, ეს ოპერატორები არიან სავსებით უწყვეტი ნამდვილ რიცხვთა სიბრტყეზე. ცხადია, რომ $P_{AB}(f)$ ოპერატორიც ასევე არის სავსებით უწყვეტი.

რადგანაც (2.1) განტოლებას $d(z) = 0$-სათვის აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ამიტომ $w(z) = P_{AB}(w)$ განტოლებასაც ექნება მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. აქედან, $P_{AB}(f)$ ოპერატორის სრულიად უწყვეტობის გამო, გამომდინარეობს $(I - P_{AB})^{-1}$ ოპერატორის შემოსაზღვრულობა, სადაც I - ერთეულოვანი ოპერატორია.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\| I-P_A \|^{-1}_{C_\alpha(\bar{G}),L_p(\bar{G})} = M, \quad \| P \|_{L_p(\bar{G}),C_\alpha(\bar{G})} = M_P ,$$

სადაც M და M_p - დადებითი მოდმივებია. (2.7) განტოლებიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$\| w(z) \|_{C_\alpha(\bar{G})} \le MM_p \| d \|_{L_p(\bar{G})} \tag{2.8}$$

(2.1) განტოლებიდან უშუალოდ შეიძლება მივიღოთ:

$$\| \partial_{\bar{Z}} w \|_{L_p(\bar{G})} \le 2N \| w \|_{C_\alpha(\bar{G})} + \| d \|_{L_p(\bar{G})} \tag{2.9}$$

(2.8) და (2.9) უტოლობებიდან შეიძლება მივიღოთ შემდეგი შემდეგი შეფასება

$$\| w \|_{C^p_\alpha(\bar{G})} = \| w \|_{C_\alpha(\bar{G})} + \| \partial_{\bar{Z}} w \|_{L_p(\bar{G})} \le \lambda \| d \|_{L_p(\bar{G})} ,$$

სადაც $\lambda = MM_p(2N+1)+1$.

ლემა დამტკიცებულია.

3. ოპტიმალური მართვის ამოცანის დასმა

ვთქვათ U - რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლეა E-დან. ყოველ $u(z): G \to U$ ფუნქციას ვუწოდოთ მართვა. U სიმრავლეს ეწოდება მართვის არე. $u(z)$ ფუნქციას ვუწოდოთ შესაძლო მართვა, თუ $u(z) \in L_p(G),\ p > 2$. ყველა დასაშვებ მართვათა სიმრავლე აღვნიშნოთ Ω-თი.

ყოველი ფიქსირებული $u \in \Omega$ - სათვის $\bar{G}$ არეში პირველი რიგის კვაზიწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის განვიხილოთ ბიწაძე-სამარსკის შემდეგი ამოცანა

$$\begin{aligned} &\partial_{\bar{Z}} w = f(z, w, \bar{w}, u), \quad z \in G, \\ &\mathrm{Re}[w(z)] = \varphi_1(z), \quad z \in \Gamma \setminus \gamma , \\ &\mathrm{Re}[w(z(s))] = \sigma \mathrm{Re}[w(z_0(s))],\ z(s) \in \gamma,\ z_0(s) \in \gamma_0, \\ &\mathrm{Im}[w(z^*)] = c,\ \ z^* \in \Gamma \setminus \gamma,\ \ c = \mathrm{const},\ \ 0 < \sigma = \mathrm{const} , \end{aligned} \tag{3.1}$$

განვიხილოთ ასევე ფუნქციონალი

$$I(u) = \iint_G F(x, y, w_1, w_2, u_1, u_2) dxdy \tag{3.2}$$

და შემდეგი შეზღუდვების სისტემა

$$L_K(u)=\iint_G \Phi_k(x,y,\ w_1,w_2,u_1,u_2)dxdy\le 0,\quad k=\overline{1,r}\,. \tag{3.3}$$

სადაც $(x,y)\in G$, $z=x+iy,\ w=w_1+iw_2,\ u=u_1+iu_2$, ხოლო F და $\Phi_k,\ k=\overline{1,r}$ ფუნქციები უწყვეტია $w_1,\ w_2,\ u_1,\ u_2$–ის მიმართ, უწყვეტად დიფერენცირებადია $w_1,\ w_2$–ის მიმართ და ეკუთვნის $L_p(G),\ p>2$.

დავსვათ ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ $u_0(z)\in\Omega$ ფუნქცია, რომლისთვისაც ბიწაძე-სამარსკის (3.1) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი დააკმაყოფილებს (3.3) შეზღუდვებს და (3.2) ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $u_0(z)\in\Omega$ ფუნქციას ვუწოდებთ ოპტიმალურ მართვას, ხოლო (3.1) ამოცანის შესაბამის განზოგადოებულ $w_0(z)$ ამონახსნს - ოპტიმალურ ამონახსნს.

ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება (A1)-(A4) პირობები. ამ შემთხვევაში ყოველი ფიქსირებული $u\in\Omega$ - სათვის $\overline{G}$ არეში (3.1) ამოცანის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია (იხ. *თეორემა_1*).

ოპტიმალობის პირობის მიღებისათვის დამატებით ვიგულისხმოთ, რომ:

(A5). $f(z,w,q,u)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $|f'_w|$ და $|f'_q|$, რომლებიც ასევე უწყვეტია იმავე არგუმენტებით, რომლითაც f ფუნქცია. F ფუნქცია უწყვეტია w_1,w_2,u_1,u_2 - არგუმენტების მიმართ. უწყვეტად წარმოებადია w_1,w_2 - ით და ეკუთვნის $L_p(G)$, $p>2$ სივრცეს.

(A6). ყოველი $(w,q)\in S^{R_1}_{wq}=\{(w,q):|w|,|q|<R\}$-სათვის G-ში სამართლიანია შემდეგი შეფასებები: $|f'_w|,\ |f'_q|\le N_1(R)<+\infty$, $|f|\le N_2(R)<+\infty$.

4. ოპტიმალობის პირობა ღია სიმრავლის შემთხვევაში

ამ შემთხვევის მთავარი განმასხვავებელი ნიშანია – ამაცანაში შემავალი f, F და $\Phi_k,\ k=\overline{1,r}$ ფუნქციების უწყვეტად დიფერენცირებადობის მოთხოვნა მართვადი პარამეტრის მიმართ. ამის თანახმად ვიგულისხმოთ, რომ U მართვის არე არის ღია ამოზნექილი ქვესიმრავლე E სივრციდან.

4.1. ფუნქციონალის ნაზრდის ფორმულის გამოყვანა

ვთქვათ $U_0(z)$ ისეთი ოპტიმალური მართვაა, რომლისთვისაც (3.1) ამოცანის ამონახსნი აკმაყოფილებს (3.3) შეზღუდვების სისტემას და (3.2) ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას:

$$I(u_0) = \min_{u \in \Omega} I(u), \quad L_k(u_0) \le 0, \; k = \overline{1, r}. \tag{4.1}$$

ვთქვათ დამოუკიდებელ ვარიანტთა $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon \delta u$ ოჯახი, სადაც $\delta u \in \Omega, \varepsilon > 0$, არის დასაშვები როცა $\varepsilon < \varepsilon_0$, ე.ი. საკმარისად მცირე $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ - სათვის, u_ε ვარიანტისათვის სრულდება ჩართვა $u_\varepsilon \in \Omega$. აღვნიშნოთ $w_\varepsilon(z)$-ით (3.1) ამოცანის ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება $u_\varepsilon(z)$ მართვას.

ფიქსირებული u_0 ფუნქციისათვის ვიპოვოთ $I(u)$ და $L_k(u)$ ფუნქციონალების ნაზრდი. ამისათვის ვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას ნაზრდისათვის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციის შემთხვევში

$$\begin{gathered}
\Delta_\varepsilon I = I(u_\varepsilon) - I(u_0) = \\
= \iint_G \left[F(x, y, w_{\varepsilon 1}, w_{\varepsilon 2}, u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2}) - F(x, y, w_{01}, w_{02}, u_{01}, u_{02}) \right] dxdy = \\
= \iint_G \left[\frac{\partial F(\eta)}{\partial w_1} \Delta w_1 + \frac{\partial F(\eta)}{\partial w_2} \Delta w_2 + \frac{\partial F(\eta)}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial F(\eta)}{\partial u_2} \Delta u_2 \right] dxdy = \\
= \iint_G \operatorname{Re}\left[\partial_{\bar{w}} F(\eta) \Delta w \right] dxdy + 2 \iint_G \operatorname{Re}\left[\partial_{\bar{u}} F(\eta) \Delta u \right] dxdy,
\end{gathered} \tag{4.2}$$

სადაც $\Delta u_i = u_{\varepsilon i} - u_{0i}$, $\Delta w_i = w_{\varepsilon i} - w_{0i}$, $i = 1, 2$, $\eta = (x, y, w_{01} + \theta \Delta w_1,\; w_{02} + \theta \Delta w_2,$ $u_{01} + \theta \Delta u_1,\, u_{02} + \theta \Delta u_2)$, $0 \le \theta \le 1$.

ანალოგიური ტოლობა შეიძლება მივიღოთ L_k, $k = \overline{1, r}$ ფუნქციონალებისთვისაც

$$\begin{gathered}
\Delta_\varepsilon L_k = L_k(u_\varepsilon) - L_k(u_0) = \\
= \iint_G \left[\Phi_k(x, y, w_{\varepsilon 1}, w_{\varepsilon 2}, u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2}) - \Phi_k(x, y, w_{01}, w_{02}, u_{01}, u_{02}) \right] dxdy = \\
= \iint_G \left[\frac{\partial \Phi_k(\xi_k)}{\partial w_1} \Delta w_1 + \frac{\partial \Phi_k(\xi_k)}{\partial w_2} \Delta w_2 + \frac{\partial \Phi_k(\xi_k)}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial \Phi_k(\xi_k)}{\partial u_2} \Delta u_2 \right] dxdy = \\
= 2 \iint_G \operatorname{Re}\left[\partial_{\bar{w}} \Phi_k(\xi_k) \Delta w \right] dxdy + 2 \iint_G \operatorname{Re}\left[\partial_{\bar{u}} \Phi_k(\xi_k) \Delta u \right] dxdy,
\end{gathered} \tag{4.3}$$

სადაც $\xi_k = (x, y, w_{01} + \theta_1^k \Delta w_1,\; w_{02} + \theta_1^k \Delta w_2,\, u_{01} + \theta_1^k \Delta u_1,\, u_{02} + \theta_1^k \Delta u_2)$, $0 \le \theta_1^k \le 1$, $k = \overline{1, r}$.

შემდეგ, $\Delta_\varepsilon I,\ \Delta_\varepsilon L_k,\ k=\overline{1,r}$ ფუნქციონალების ნაზრდებისათვის ავაგოთ რომელიმე ინტეგრალური წარმოდგენა. ამ მიზნისათვის $C_\alpha^p(\overline{G})$ სივრცეზე ნებისმიერი ε-სათვის, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, განვსაზღვროთ შემდეგი წრფივი ოპერატორი

$$S_\varepsilon(v)=\partial_{\overline{z}}v-\int_0^1\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial w}dt\cdot v-\int_0^1\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial\overline{w}}dt\cdot\overline{v}, \tag{4.4}$$

სადაც $\eta_\varepsilon=(z,w_0+t\Delta w,\ \overline{w}_0+t\Delta\overline{w},\ u_\varepsilon),\ \ 0\le t\le 1$.

S_ε ოპერატორი $C_\alpha^p(\overline{G})$ სივრცეს ასახავს $L_p(\overline{G})$-ზე. მართლაც ერთის მხრივ, ნებისმიერი $v(z)\in C_\alpha^p(\overline{G})$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ჩართვა $S_\varepsilon(v(z))\in L_p(\overline{G})$, ხოლო მეორე მხრივ, ლემა1-ის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ განტოლებას

$$S'_\varepsilon(v)=\omega(z) \tag{4.5}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი $\omega(z)\in L_p(\overline{G})$ ფუნქციისათვის. ამასთან სამართლიანია შეფასება

$$\|v\|_{C_\alpha^p(\overline{G})}\le\gamma\|\omega\|_{L_p(\overline{G})},\quad \gamma=\gamma(p,N_1,|G|)>0, \tag{4.6}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ S_ε ოპერატორისათვის არსებობს შებრუნებული ოპერატორი $S_\varepsilon^{-1}:L_p(\overline{G})\to C_\alpha^p(\overline{G})$ და $\|S_\varepsilon^{-1}\|\le\gamma$.

შევნიშნოთ, რომ $\Delta w(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$S_\varepsilon(\Delta w)=\Delta uf\equiv f(z,w_0,\overline{w}_0,u_\varepsilon)-f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0). \tag{4.7}$$

მართლაც, (4.7) განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta uf=[f(z,w_\varepsilon,\overline{w}_\varepsilon,u_\varepsilon)-f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0)]+[f(z,w_0,\overline{w}_0,u_\varepsilon)-f(z,w_\varepsilon,\overline{w}_\varepsilon,u_\varepsilon)]$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $w_\varepsilon(z)$ და $w_0(z)$ ფუნქციები წარმოადგენენ (3.1) ამოცანის ამონახსნებს, რომლებიც შეესაბამებიან $u_\varepsilon(z)$ და $u_0(z)$ მართვებს, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$\partial_{\overline{z}}\Delta w=\partial_{\overline{z}}w_\varepsilon(z)-\partial_{\overline{z}}w_0(z)=f(z,w_\varepsilon,\overline{w}_\varepsilon,u_\varepsilon)-f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0). \tag{4.8}$$

აღვნიშნოთ $g(t)=f(z,w_0+t\Delta w,\overline{w}_0+t\Delta\overline{w},u_\varepsilon)$, მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$\begin{gathered}f(z,w_0,\overline{w}_0,u_\varepsilon)-f(z,w_\varepsilon,\overline{w}_\varepsilon,u_\varepsilon)=\\=g(0)-g(1)=-\int_0^1\frac{dg(t)}{dt}dt=-\left(\int_0^1\left[\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial w}\Delta w+\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{d\overline{w}}\Delta\overline{w}\right]dt\right),\end{gathered} \tag{4.9}$$

სადაც $\eta_\varepsilon=(z,w_0+t\Delta w,\overline{w}_0+t\Delta\overline{w},u_\varepsilon)$.

(4.8), (4.9) ტოლობების გათვალისწინებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\Delta w(z)$ წარმოადგენს (4.7) განტოლების ამონახსნს. რადგანაც $\Delta uf \equiv \Delta_u f(z, w_0, u_\varepsilon, u_0) \in L_p(\overline{G}),\ p > 2$, ასევე $\Delta w \in C_\alpha^p(\overline{G})$, აქედან Δw ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta w = S_\varepsilon^{-1}(\Delta_u f)\,. \tag{4.10}$$

თუ განვიხილავთ $\Delta_\varepsilon I$ და $\Delta_\varepsilon L_k$, $k = \overline{1,r}$ ცდომილებებს, შევნიშნავთ, რომ (4.2), (4.3) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები ერთმნიშვნელოვნად განსაზღვრავს რომელიმე წრფივ T_ε და $T_{\varepsilon k}$, $k = \overline{1,r}$ ფუნქციონალებს $\left(C_\alpha^p(\overline{G})\right)^*$ შეუღლებული სივრციდან:

$$\left\langle T_\varepsilon,\, \Delta w\right\rangle = 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\overline{w}} F(\eta)\Delta w]dxdy\,, \tag{4.11}$$

$$\left\langle T_{\varepsilon k},\, \Delta w\right\rangle = 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\overline{w}} \Phi_k(\xi_k)\Delta w]dxdy\,, \tag{4.12}$$

სადაც $\left\langle T_{\varepsilon k},\, \Delta w\right\rangle = 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\overline{w}} \Phi_k(\xi_k)\Delta w]dxdy$ -ით აღინიშნება T_ε ფუნქციონალის მნიშვნელობა $\Delta w \in C_\alpha^p(\overline{G})$ ელემენტზე.

განვიხილოთ ოპერატორი $(S_\varepsilon^{-1})^*$, რომელიც წარმოადგენს S_ε^{-1} ოპერატორის შეუღლებულს. ეს ოპერატორი $\left(C_\alpha^p(\overline{G})\right)^*$ სივრცეს ასახავს $L_p^*(G)$ სივრცეზე, რადგან განსაზღვრის თანახმად $\left\langle T_\varepsilon, S_\varepsilon^{-1} f\right\rangle = \left\langle (S_\varepsilon^{-1})^* T_\varepsilon, f\right\rangle$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $(S_\varepsilon^{-1})^* T_\varepsilon = Q_\varepsilon$ და $(S_\varepsilon^{-1})^* T_{\varepsilon k} = Q_{\varepsilon k}$. ფუნქციონალები Q_ε და $Q_{\varepsilon k}$, $k = \overline{1,r}$ თავისთავად წარმოადგენენ წრფივ შემოსაზღვრულ ფუნქციონალებს $L_p^*(\overline{G})$ -დან და

$$\left\langle T_\varepsilon,\, \Delta w\right\rangle = \left\langle T_\varepsilon, S_\varepsilon^{-1}(\Delta_u f)\right\rangle = \left\langle (S_\varepsilon^{-1})^* T_\varepsilon, \Delta_u f\right\rangle = \left\langle Q_\varepsilon, \Delta_u f\right\rangle. \tag{4.13}$$

ანალოგიურად ვრწმუნდებით შემდეგი ტოლობების სამართლიანობაში

$$\left\langle T_{\varepsilon k},\, \Delta w\right\rangle = \left\langle Q_{\varepsilon k}, \Delta_u f\right\rangle,\quad k = \overline{1,r}\,. \tag{4.14}$$

რისის თეორემის [84] გათვალისწინებით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ არსებობს ისეთი ψ_ε, $\psi_{\varepsilon k} \in L_q(\overline{G})$, $1/p + 1/q = 1$, $k = \overline{1,r}$ ფუნქციები, რომ $\Delta_u f \in L_p(\overline{G}),\ p > 2$ -სათვის ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$\left\langle Q_\varepsilon, \Delta_u f \right\rangle = \operatorname{Re}\iint_G \psi_\varepsilon(z)\Delta_u f dxdy, \tag{4.15}$$

$$\left\langle Q_{\varepsilon k}, \Delta_u f \right\rangle = \operatorname{Re}\iint_G \psi_{\varepsilon k}(z)\Delta_u f dxdy,\ k = \overline{1,r}\,. \tag{4.16}$$

(4.11)-(4.16) ტოლობების გათვალისწინებით, $\Delta_\varepsilon I$ და $\Delta_\varepsilon L_k,\ k=\overline{1,r}$ ფუნქციონალების ნაზრდები (4.2), (4.3) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta_\varepsilon I = \operatorname{Re}\iint_G \psi_\varepsilon(z)\Delta_u f dxdy + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}} F(\eta)\Delta u]dxdy \tag{4.17}$$

$$\Delta_\varepsilon L_k = \operatorname{Re}\iint_G \psi_{\varepsilon k}(z)\Delta_u f dxdy + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}} \Phi_k(\xi_k)\Delta u]dxdy,\ k=\overline{1,r} \tag{4.18}$$

ავღვნიშნოთ, რომ ისე როგორც $Q_\varepsilon, Q_{\varepsilon k} \in L_p^*(\overline{G})$ ფუნქციონალებს შეესაბამება $\psi_\varepsilon, \psi_{\varepsilon k} \in L_p(\overline{G})$ ფუნქციები, ასევე ეს ფუნქციები ერთმნიშვნელოვნად განისაზღვრებიან შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\psi_\varepsilon = (S_\varepsilon^{-1})^* T_\varepsilon,\quad \psi_{\varepsilon k} = (S_\varepsilon^{-1})^* T_{\varepsilon k},\quad k=\overline{1,r}\,. \tag{4.19}$$

4.2. ფუნქციონალების პირველი ვარიაციების გამოთვლა

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები

$$\delta I = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta\varepsilon I}{\varepsilon},\quad \delta L_k = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta\varepsilon L_k}{\varepsilon},\ k=\overline{1,r}\,, \tag{4.20}$$

იმ შემთხვევაში, როცა ეს ზღვრები არსებობს, მაშინ δI და δL_k გამოსახულებებს ვუწოდებთ შესაბამისი ფუნქციონალების პირველ ვარიაციებს.

დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქციები უწყვეტად დიფერენცირებადია მართვადი პარამეტრის მიმართ და თუ U მართვის არე ღია ამოზნექილი ქვესიმრავლეა E სივრციდან, მაშინ ყოველთვის იარსებებს I და L_k, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციონალების პირველი ვარიაციები.

მართლაც:

$$\begin{aligned}\delta I &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\operatorname{Re}\iint_G \psi_\varepsilon(z)\Delta u f dxdy + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}}F(\eta)\Delta u]dxdy\right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\operatorname{Re}\iint_G [f(z,w_0,\bar{w}_0,u_\varepsilon)-f(z,w_0,\bar{w}_0,u_0)]\psi_\varepsilon(z)dxdy + \right.\\ &\left. + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}}F(\eta)\Delta u]dxdy\right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\operatorname{Re}\iint_G \psi_\varepsilon(z)\left(\int_0^1 \frac{\partial f(z,w_0,\bar{w}_0,\eta_1)}{\partial u}dt\right)\delta u dxdy\right\} + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}}F(\eta)\delta u]dxdy,\end{aligned} \tag{4.21}$$

სადაც $\eta_1 = u_0 + t\varepsilon\delta u$.

ანალოგიურად δL_k პირველი ვარიაცია მიღებს სახეს:

$$\begin{aligned}\delta L_k &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\operatorname{Re}\iint_G \psi_{\varepsilon k}(z)\Delta u f dxdy + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}}\Phi_k(\xi_k)\Delta u]dxdy\right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\operatorname{Re}\iint_G [f(z,w_0,\bar{w}_0,u_\varepsilon)-f(z,w_0,\bar{w}_0,u_0)]\psi_{\varepsilon k}(z)dxdy + \right.\\ &\left. + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}}\Phi_k(\xi_k)\Delta u]dxdy\right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\operatorname{Re}\iint_G \psi_{\varepsilon k}(z)\left(\int_0^1 \frac{\partial f(z,w_0,\bar{w}_0,\eta_1)}{\partial u}dt\right)\delta u dxdy\right\} + 2\iint_G \operatorname{Re}[\partial_{\bar{u}}\Phi_k(\xi_k)\delta u]dxdy,\end{aligned}$$

სადაც $\eta_{1k} = u_0 + t\varepsilon\delta u$.

აშკარაა, რომ $\varepsilon \to 0$ -სათვის

$$\left\| \int_0^1 \frac{\partial f(z,w_0,\bar{w}_0,\eta_1)}{\partial u}dt - \frac{\partial f(z,w_0,\bar{w}_0,u_0)}{\partial u}\right\|_{L_2(G)} \to 0,$$

და

$$\left\|\partial_{\bar{u}}F(\eta) - \partial_{\bar{u}}F(x,y,w_{01},w_{02},u_{01},u_{02})\right\|_{L_2(\bar{G})} \to 0,$$

ასე რომ f და F ფუნქციები უწყვეტად დიფერენცირებადია მართვადი პარამეტრით.

შემდგომში დაგვჭირდება შემდეგი

ლემა_2. *თუ* $\varepsilon \to 0$, *მაშინ* $\|\psi_\varepsilon - \psi_0\|_{L_q(\bar{G})} \to 0$.

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$\|\psi_\varepsilon-\psi_0\|_{L_q(\bar G)}=\|(S_\varepsilon^{-1})^*T_\varepsilon-(S_0^{-1})^*T_0\|_{L_q(\bar G)}\le$$
$$\le\|(S_0^{-1})^*-(S_0^{-1})^*\|_{(C_\alpha^p(\bar G))^*,L_p^*(\bar G)}\cdot\|T_\varepsilon\|_{(C_\alpha^p(\bar G))^*}\pm$$
$$\pm\|(S_0^{-1})^*\|_{(C_\alpha^p(\bar G))^*,L_p^*(\bar G)}\cdot\|T_\varepsilon-T_0\|_{(C_\alpha^p(\bar G))^*}=$$
$$=\|S_0^{-1}\|_{L_p(\bar G),C_\alpha^p(\bar G)}\cdot\|T_\varepsilon-T_0\|_{(C_\alpha^p(\bar G))^*}+$$
$$+\|S_\varepsilon^{-1}-S_0^{-1}\|_{L_p(\bar G),C_\alpha^p(\bar G)}\cdot\|T_\varepsilon\|_{(C_\alpha^p(\bar G))^*}$$

რადგანაც F ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია w-ს მიმართ, მაშინ $\|T_\varepsilon-T_0\|_{(C_\alpha^p(\bar G))^*}\to 0$, როცა $\varepsilon\to 0$.

ჩვენ გვრჩება დავამტკიცოთ, რომ $\|S_\varepsilon^{-1}-S_0^{-1}\|\to 0$, როცა $\varepsilon\to 0$. ამისათვის განვიხილოთ რაიმე $\omega(z)\in L_p(\bar G),\ p>2$ ფუნქცია. შემდეგ განვიხილოთ v_ε ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს

$$S_\varepsilon(v_\varepsilon)=\omega,$$

მაშინ ცხადია, რომ $v_\varepsilon=S_\varepsilon^{-1}\omega\in C_\alpha^p(\bar G)$. განვსაზღვროთ ასევე v_0 ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს $S_0(v_0)=\omega$ განტოლების ამონახსნს.

ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი გამოსახულების შეფასება:

$$\|(S_\varepsilon^{-1}-S_0^{-1})\omega\|_{C_\alpha^p(\bar G)}=\|S_\varepsilon^{-1}(\omega)-S_0^{-1}(\omega)\|_{C_\alpha^p(\bar G)}=\|v_\varepsilon-v_0\|_{C_\alpha^p(\bar G)}\tag{4.22}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $S_\varepsilon(v_\varepsilon)-S_0(v_0)=0$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_\varepsilon(v_\varepsilon-v_0)=-(S_\varepsilon-S_0)v_0,$$

მაშინ *ლემა_1*-ის შედეგების გათვალისწინებით, შეიძლება მივიღოთ შემდეგი შეფასება

$$\|v_\varepsilon-v_0\|_{C_\alpha^p(\bar G)}\le\gamma\|(S_\varepsilon-S_0)v_0\|_{L_p(\bar G)}.\tag{4.23}$$

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$(S_\varepsilon-S_0)v_0=\int_0^1\left(\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial w}-\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial w}\right)dt\cdot v_0+\int_0^1\left(\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial\bar w}-\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial\bar w}\right)dt\cdot\bar v_0;$$

$$\begin{aligned}\|(S_\varepsilon-S_0)v_0\|_{L_p(\bar G)}\le&\left\|\int_0^1\left(\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial w}-\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial w}\right)dt\right\|_{L_p(\bar G)}\cdot\|v_0\|_{C_\alpha^p(\bar G)}+\\&+\left\|\int_0^1\left(\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial\bar w}-\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial\bar w}\right)dt\right\|_{L_p(\bar G)}\cdot\|\bar v_0\|_{C_\alpha^p(\bar G)}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

რადგანაც $f(z,w,\overline{w},u)$ ფუნქცია უწყვეტია w და $\overline{w}$-ის მიმართ, ამიტომ აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ყოველი $t\in[0,1]$-სათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial w}-\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial w}\right\|_{L_p(\overline{G})}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial \overline{w}}-\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial \overline{w}}\right\|_{L_p(\overline{G})}=0.$$

ლებეგის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის ძალით, (A6) პირობის საფუძველზე, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\int_0^1\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial w}dt-\int_0^1\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial w}dt\right\|_{L_p(\overline{G})}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\int_0^1\frac{\partial f(\eta_\varepsilon)}{\partial \overline{w}}dt-\int_0^1\frac{\partial f(\eta_0)}{\partial \overline{w}}dt\right\|_{L_p(\overline{G})}=0.$$

(4.24) უტოლობის გამოყენებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ არსებობს $\delta(\varepsilon)\geq 0,\ \delta(\varepsilon)\to 0$ ფუნქცია, როცა $\varepsilon\to 0$, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|(S_\varepsilon-S_0)v_0\|_{L_p(\overline{G})}\leq\delta(\varepsilon)\|v_0\|_{C^p_\alpha(\overline{G})}. \tag{4.25}$$

ლემა 1-ის საფუძველზე, v_0 ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი შეფასება

$$\|v_0\|_{C^p_\alpha(\overline{G})}\leq\lambda\|\omega\|_{L_p(\overline{G})}, \tag{4.26}$$

ასე რომ v_0 წარმოადგენს $S_0v_0=\omega$ განტოლების ამონახსნს.

(4.23), (4.25), (4.26) შეფასებების საფუძველზე, (4.22) ტოლობის გათვალისწინებით, შეიძლება მივიღოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\|(S_\varepsilon^{-1}-S_0^{-1})\omega\|_{C^p_\alpha(\overline{G})}\leq\lambda\delta(\varepsilon)\|\omega\|_{L_p(\overline{G})},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|S_\varepsilon^{-1}-S_0^{-1}\|_{L_p(\overline{G}),C^p_\alpha(\overline{G})}=0,$$

ამრიგად ლემა დამტკიცებულია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(0)=f(z,w_0,\overline{w}_0,u_0),\ \ F(0)=F(x,y,w_{01},w_{02},u_{01},u_{02}),$$

მაშინ I ფუნქციონალის δI პირველი ვარიაციისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\delta I = \mathrm{Re}\iint_G \psi_0(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}\delta u dxdy + 2\,\mathrm{Re}\iint_G \partial_{\bar{u}} F(0)\delta u dxdy\,, \tag{4.27}$$

სადაც ψ_0 ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\psi_0 = (S_0^{-1})^* T_0\,. \tag{4.28}$$

ანალოგიური მსჯელობების ჩატარებით L_k ფუნქციონალების პირველი ვარიაციებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\delta L_k = \mathrm{Re}\iint_G \psi_{0k}(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}\delta u dxdy + 2\iint_G \mathrm{Re}[\partial_{\bar{u}}\Phi_k(0)\delta u]dxdy\,, \tag{4.29}$$

სადაც

$$\psi_{0k} = (S_0^{-1})^* T_{0k}\,, \quad k = \overline{1,r}\,. \tag{4.30}$$

4.3. ოპტიმალობის აუცილებელი პირობის მიღება

$\delta I,\ \delta L_k,\ k=\overline{1,r}$ გამოსახულებების გათვალისწინებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ ყოველ დასაშვებ δu –ს შეესაბამება ვარიაციების განსაზღვრული ნაკრები

$$\{\delta I, \delta L_1, \ldots\ldots, \delta L_r\}\,, \tag{4.31}$$

რომლებიც შეიძლება განვიხილოთ, როგორც R^{r+1} სივრცის ვექტორი. თუ განვიხილავთ ყველა შესაძლო $\delta u \in \Omega$ სიმრავლეს, მაშინ მას შეესაბამება რომელიმე $K \subset R^{r+1}$ სიმრავლე. $\delta I,\ \delta L_k,\ k=\overline{1,r}$ გამოსახულებების გათვალისწინებით, მარტივად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ K სიმრავლე წარმოადგენს ამოზნექილ კონუსს (წვეროთი კოორდინატთა სათავეში) R^{r+1} სივრცეში.

განვიხილოთ ასევე შემდეგი ღია ამოზნექილი R კონუსი R^{r+1} სივრცეში,

$$R = \{x_0 < 0, x_1 < 0, \ldots\ldots, x_r < 0\}\,.$$

[108]-ში მოყვანილი მსჯელობის განმეორებით, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ K და R კონუსები არ თანაიკვეთება. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ არსებობს რაიმე ვექტორი

$$(\delta^* I,\ \delta^* L_1, \ldots\ldots, \delta^* L_r)\,, \tag{4.32}$$

რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის ორივე კონუსს. ამის გათვალისწინებით, რადგანაც R კონუსი ღიაა, მოიძებნება ისეთი რიცხვი $\alpha > 0$, რომ

$$\delta^* I < -\alpha, \quad \delta^* L_1 < -\alpha, ..., \delta^* L_r < -\alpha \,. \tag{4.33}$$

და როგორც ყოველი ვექტორი K სიმრავლიდან, (4.32) ვექტორიც ასევე შეესაბამება განსაზღვრულ $u_\varepsilon^* = u_0 + \varepsilon\delta^* u$ ვარიანტას. მაშინ (4.20) პირველი ვარიაციის თანახმად, შეიძლება დავწეროთ

$$\begin{aligned} &\Delta\varepsilon I = I(u_\varepsilon^*) - I(u_0) = \varepsilon\delta^* I + \underline{0}(\varepsilon), \\ &\Delta\varepsilon L_k = L_k(u_\varepsilon^*) - L_k(u_0) = \varepsilon\delta^* L_k + \underline{0}(\varepsilon), \quad k = \overline{1, r}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

(4.33) უტოლობის გათვალისწინებით, ε-ის საკმარისად მცირე მნიშვნელობისათვის (4.32) ტოლობიდან შეიძლება მივიღოთ შემდეგი უტოლობები

$$\begin{aligned} &I(u_\varepsilon^*) < I(u_0), \\ &L_k(u_\varepsilon^*) < L_k(u_0), \quad k = \overline{1, r}, \end{aligned}$$

რომლებიც ეწინააღმდეგებიან u_0 მართვის ოპტიმალობას (3.3) შეზღუდვებისას. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს ჩვენს დებულებას K და R კონუსების თანაუკვეთადობაზე.

ამ მტკიცებულებიდან გამომდინარე R^{r+1} სივრცეში შეიძლება ავაგოთ ჰიპერსიბრტყე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და ყოფს ამოზნექილ, თანაუკვეთად K და R კონუსებს. ეს ჰიპერსიბრტყე შეიძლება განვსაზღვროთ თავისი ნორმალის ვექტორით

$$\vec{\mu} = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_r) \in R^{r+1} \,.$$

ჩავთვალოთ, რომ $\vec{\mu}$ მიმართულია K კონუსის მხარეს. ამ შემთხვევაში $\vec{\mu}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი K კონუსის ნებისმიერ ვექტორზე იქნება არაუარყოფითი:

$$\begin{aligned} &\mu_0 \delta I + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \delta L_i \geq 0, \\ &\{\delta I, \delta L_1, ..., \delta L_r\} \in K. \end{aligned} \tag{4.35}$$

(4.35) თანაფარდობა (4.27), (4.29) ფორმულებთან ერთად საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ $u_0(z)$ მართვის ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით.

ლებეგის თეორემის [113] თანახმად (4.35) უტოლობიდან, (4.27) და (4.29) გამოსახულებების გათვალისწინებით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი დასაშვები δu -სათვის თითქმის ყველგან G -ზე სრულდება უტოლობა

$$\operatorname{Re}\{[\mu_0(\psi_0(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar{u}}F(0))+\sum_{k=1}^{r}\mu_k(\psi_{0k}(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar{u}}\Phi_k(0)]\partial u\}\geq 0 \qquad (4.36)$$

ვთქვათ $\partial u = u - u_0$, სადაც u - რაიმე დასაშვები მართვაა. მაშინ (4.36) უტოლობა შეიძლება გადავწეროთ მინიმუმის პრინციპის სახით თითქმის ყველგან G -ზე:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\{[\mu_0(\psi_0(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar{u}}F(0))+\sum_{k=1}^{r}\mu_k(\psi_{0k}(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar{u}}\Phi_k(0))]u_0\}=\\&=\inf_{u\in U}\operatorname{Re}\{[\mu_0(\psi_0(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar{u}}F(0))+\sum_{k=1}^{r}\mu_k(\psi_{0k}(z)\frac{\partial f(0)}{\partial u}+2\partial_{\bar{u}}\Phi_k(0))]u\}\end{aligned} \qquad (4.37)$$

შევნიშნოთ, რომ $\bar{\mu}=(\mu_0,\mu_1,...,\mu_r)$ ვექტორთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს (4.35) პირობას, R^{r+1} სივრცეში ასახავს P კონუსს წვეროთი კოორდინატთა სათავეში. როგორც K კონუსი, ასევე P კონუსი სრულად განისაზღვრება $\{u_0(z),\, w_0(z)\}$ ოპტიმალური წყვილით, $f(z,w,\bar{w}_0,u)$ ფუნქციით (3.1)-დან და L და L_k, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციონალებით. თავის მხრივ ψ_0, ψ_{0k}, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციები ერთმნიშვნელოვნად განისაზღვრება (4.28), (4.30) ოპერატორული თანაფარდობების დახმარებით, რომლებშიც T_0, T_{0k}, $k=\overline{1,r}$ წრფივი ფუნქციონალები $\left(C^p_\alpha(\bar{G})\right)^*$ სივრციდან დამოკიდებული არიან $w_0(z)$ ფუნქციაზე და I, L_k, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციონალებზე, ხოლო $\left(C^p_\mu(\bar{G})\right)^*$ სივრციდან $L_q(\bar{G})$, $1/p+1/q=1$ სივრცეში მოქმედი $(S_0^{-1})^*$ ოპერატორი, სრულად განისაზღვრება $\{u_0(z),\, w_0(z)\}$ ოპტიმალური წყვილით.

ყოველივე ზემოთქმული გვაძლევს საშუალებას ჩამოვაყალიბოთ მინიმუმის შემდეგი პრინციპი.

თეორემა_2. თუ $u_0(z)$ *- ოპტიმალური მართვაა,* $w_0(z)$ *მისი შესამამისი ამონახსნია (3.1) ამოცანისათვის, მაშინ არსებობს ზემოთ განსაზღვრული* P *კონუსი* R^{r+1} *-დან და* ψ_0, ψ_{0k}, $k=\overline{1,r}$ *ფუნქციები* $L_q(\bar{G})$ *-დან ისეთი, რომ ნებისმიერი* $\mu\in P$ *ვექტორისათვის თითქმის ყველგან* G *-ზე სრულდება (4.37) თანაფარდობა.*

5. ოპტიმალობის პირობა შემოსაზღვრული სიმრავლის შემთხვევაში

ისევ განვიხილოთ ოპტიმალური მართვის (3.1)-(3.3) ამოცანა. ამ პუნქტში ჩვენ მივიღებთ ოპტიმალობის აუცილებელ პირობას, როცა f, F და Φ_k, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციები დამოკიდებული არიან მხოლოდ მართვადი პარამეტრის უწყვეტობაზე. ამის გათვალისწინებით ვიგულისხმებთ, რომ U მართვის არე რაიმე შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეა E-დან.

აღვნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული წინადადებების გათვალისწინებით, ფუნქციონალების პირველი ვარიაციის პოვნა, ზოგადად რომ ვთქვათ, შეუძლებელია, თუ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფში წარმოდგენილ მეთოდს. ამიტომ ფუნქციონალების ნაზრდის გამოსათვლელად ვისარგებლებთ იმპულსური ვარირებით [107], [111].

5.1. შედარების ფუნქციათა ოჯახის კონსტრუქცია

ვთქვათ U რაიმე შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეა E-დან. ყოველ ზომად $u(z):G\to U$ ფუნქციას ვუწოდებთ დასაშვებ მართვას. ყველა დასაშვები მართვების სიმრავლეს აღვნიშნავთ Ω-თი.

ვთქვათ $u_0(z)\in\Omega$ - ოპტიმალური მართვაა, ხოლო $w_0(z)$ - ამ მართვის შესაბამისი (3.1) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნია.

ავაგოთ $u_0(z)$ მართვის იმპულსური ვარიანტა. ამისათვის ვაწარმოოთ მსჯელობა [108]-ში მოყვანილი მსჯელობის მსგავსად.

განვიხილოთ წყვილ-წყვილად განსხვავებული ლებეგის წერტილების ნებისმიერი სასრული $\{z_i\}$ ნაკრები G არიდან. არაუარყოფითი რიცხვების $\gamma=\{\gamma_i^j\}$ ყოველი განსხვავებული სასრული ნაკრებისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$-სათვის მართკუთხედები:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{ij}^{\varepsilon}\equiv\{z:\ z=x+iy\in G,\\
&x_i-\varepsilon\sum_{k=1}^{j}\gamma_i^k<x\le x_i-\varepsilon\sum_{k=1}^{j-1}\gamma_i^k,\\
&y_i-j\varepsilon<y\le y_i-(j-1)\varepsilon\}
\end{aligned}$$

წყვილ-წყვილად არ თანაიკვეთება და ყველა ისინი ეკუთვნის G არეს. ვთქვათ $u=\{u_{ij}\}$ - წერტილთა სასრული ნაკრებია U სიმრავლიდან. განვიხილოთ რაიმე ნაკრები: $\{z_i\}$, $\{u_{ij}\}$, $\{\gamma_i^j\}$. ამ ნაკრებისათვის $u_\varepsilon(z)$ ვარიანტა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$u_\varepsilon(z)=\begin{cases} u_{ij}, & z\in \Pi_{ij}^\varepsilon, \\ u_0(z), & z\in G\setminus \bigcup_{ij}\Pi_{ij}^\varepsilon \end{cases} \tag{5.1}$$

5.2. ფუნქციონალების პირველი ვარიაციები

წინა პარაგრაფის მსგავსი მსჯელობები ჩავატაროთ I და L_k, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციონალებისათვის, მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენას:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon I &= \operatorname{Re}\iint_G \psi_\varepsilon(z)\Delta uf(z,w_0,u_0,u_\varepsilon)dxdy+\iint_G \Delta uF(x,y,w_0,u_0,u_\varepsilon)dxdy, \\ \Delta\varepsilon L_k &= \operatorname{Re}\iint_G \psi_{\varepsilon k}(z)\Delta uf(z,w_0,u_0,u_\varepsilon)dxdy+\iint_G \Delta u\Phi_k(x,y,w_0,u_0,u_\varepsilon)dxdy,\ k=\overline{1,r}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

სადაც

$$\Delta uF(x,y,w_0,u_0,u_\varepsilon)=F(x,y,w_{01},w_{02},u_{\varepsilon1},u_{\varepsilon2})-F(x,y,w_{01},w_{02},u_{01},u_{02}),$$

$$\Delta u\Phi_k(x,y,w_0,u_0,u_\varepsilon)=\Phi_k(x,y,w_{01},w_{02},u_{\varepsilon1},u_{\varepsilon2})-\Phi_k(x,y,w_{01},w_{02},u_{01},u_{02}),$$

ხოლო იმპულსური $u_\varepsilon(z)$ ვარიანტა განსაზღვრულია (5.1) ტოლობით პარამეტრების რაიმე ნაკრებისათვის:

$$\begin{aligned} &\{z_i\},\quad \{u_{ij}\},\quad \{\gamma_i^j\},\quad 1\le i\le s,\quad 1\le j\le q, \\ &z_i\in G,\quad u_{ij}\in U,\quad \gamma_i^j\ge 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

I და L_k, $k=\overline{1,r}$ ფუნქციონალების ნაზრდების (5.2) წარმოდგენა, გვაძლევს შესაძლებლობას გამოვთვალოთ ამ ფუნქციონალების პირველი ვარიაციები. ეს პირველი ვარიაციები, რათქმაუნდა, დამოკიდებული იქნება (5.3) ნაკრებზე.

პირველი ვარიაციის განსაზღვრის [107] გათვალისწინებით შეიძლება დავწეროთ

$$\delta I=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\Delta\varepsilon I=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\operatorname{Re}\iint_G \Delta uf(z,w_0,u_0,u_\varepsilon)\psi_\varepsilon(z)dxdy+\right.$$

$$\left.+\iint_G \Delta uF(x,y,w_0,u_0,u_\varepsilon)dxdy\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{1\le i\le s\\ 1\le j\le q}}\gamma_i^j\frac{1}{|\Pi_{ij}^\varepsilon|}\operatorname{Re}\iint_{\Pi_{ij}^\varepsilon(z_i)}\Delta uf(z,w_0,u_0,u_\varepsilon)\psi_\varepsilon(z)dxdy+ \tag{5.4}$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{1\le i\le s\\ 1\le j\le q}}\gamma_i^j\frac{1}{|\Pi_{ij}^\varepsilon|}\iint_{\Pi_{ij}^\varepsilon(z_i)}\Delta uF(x,y,w_0,u_0,u_\varepsilon)dxdy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{1\le i\le s\\ 1\le j\le q}}\gamma_i^j g_\varepsilon^{ij}(x_i,y_i)+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{1\le i\le s\\ 1\le j\le q}}\gamma_i^j P_\varepsilon^{ij}(x_i,y_i)$$

სადაც

$$g_\varepsilon^{ij}(x_i,y_i)=\frac{1}{|\Pi_{ij}^\varepsilon|}\operatorname{Re}\iint_{\Pi_{ij}^\varepsilon(z_i)}\Delta uf(z,w_0,u_0,u_\varepsilon)\psi_\varepsilon(z)dxdy$$

$$P_\varepsilon^{ij}(x_i,y_i)=\frac{1}{|\Pi_{ij}^\varepsilon|}\iint_{\Pi_{ij}^\varepsilon(z_i)}\Delta uF(x,y,w_0,u_0,u_\varepsilon)dxdy$$

ამასთან ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის, ჩავთვალოთ, რომ $g_\varepsilon^{ij}(x,y)$ და $P_\varepsilon^{ij}(x,y)$ ფუნქციები ნულის ტოლია იმ წერტილებში, სადაც ისინი არ არიან განსაზღვრული წინა ტოლობების გამოყენებით.

აღვნიშნოთ, რომ (5.3) პარამეტრების რაიმე ნაკრებისათვის არსებობს G_ε სასაზღვრო ზოლი, რომლის სიგანე არ აღემატება ε-ს. ამ პირობებში ყველა Π_{ij}^ε მართკუთხედი მოხვდება $\overline{G}\setminus G_\varepsilon$ არეში, ამიტომ $\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{mes}G_\varepsilon=0$.

(5.4)-ში ზღვარზე გადასვლის შესაძლებლობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორია $\{z_i\}$ და $\{u_{ij}\}$ წერტილთა ნაკრები. გამოდის, რომ ყოველი s,q რიცხვთა წყვილისათვის და $\{u_{ij}\}$, $1\le i\le s$, $1\le j\le q$ წერტილთა ნაკრებისათვის, არსებობს ისეთი E_u^{sq} სიმრავლე, რომელსაც აქვს სრული ზომა G-ზე, და ისეთი $\{\varepsilon_k^{usq}\}_{k=1}^\infty$ რიცხვთა მიმდევრობა (რომელიც მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $k\to\infty$), მაშინ (5.4)-ში ზღვარზე გადასვლები $\{\varepsilon_k^{usq}\}$ მიმდევრობის მიმართ შესაძლებელია წერტილთა ნებისმიერი $\{z_i\}$ ნაკრებისათვის E_u^{sq} სიმრავლიდან, საიდანაც

$$\lim_{k\to\infty} g^{ij}_{\varepsilon_k^{usq}}(x_i, y_i) = \mathrm{Re}[\Delta uf(z_i, w_0(z_i), u_0(z_i), u_{ij})\psi_0(z_i)] \equiv$$
$$\equiv g_0^{ij}(x_i, y_i), \quad (x_i, y_i) \in E_u^{sq}, \quad 1 \le i \le s, \quad 1 \le j \le q, \tag{5.5}$$

$$\lim_{k\to\infty} P^{ij}_{\varepsilon_k^{usq}}(x_i, y_i) = \Delta uF(x_i, y_i, w_0(x_i, y_i), u_0(x_i, y_i), u_{ij}) \equiv$$
$$\equiv P_0^{ij}(x_i, y_i), \quad (x_i, y_i) \in E_u^{sq}, \quad 1 \le i \le s, \quad 1 \le j \le q. \tag{5.6}$$

შევნიშნოთ, რომ (5.6) ტოლობის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლებეგის თეორემიდან [113].

[108]-ში განხილული მსჯელობის განმეორებით, შეიძლება დავამტკიცოთ (5.5) ტოლობის სამართლიანობა. $\{z_i\} \in E_u^{sq}$, $1 \le i \le s$ გათვალისწინებით ჩანს, რომ δI პირველი ვარიაციის გამოსახულება დამოკიდებულია s, q რიცხვებზე და კონკრეტული $u = \{u_{ij}\}$ ნაკრების სახეზე.

ამ დამოკიდებულებიდან თავის დასაღწევად, ჩავატაროთ [108]-ში განხილული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობა. ამისათვის U არეში გამოვყოთ თვლადი, ყველგან მკრივი B ქსელი. ყველა შესაძლო $\{u_{ij}\}$, $u_{ij} \in B$, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le q$ ნაკრებების თავმოყრა თვლადია: $u_1, u_2, ...$ ყოველი u_i ნაკრებისათვის არსებობს $E_{u_i}^{sq}$ სიმრავლე და $\{\varepsilon_k^{u_i sq}\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ზემოთ აღნიშნული თვისებებით. კანტორის დიაგონალიზაციის პროცესის გამოყენებით, შეიძლება ვიპოვოთ მიმდევრობა $\{\varepsilon_m\}$ $(\varepsilon_m \to 0, m \to \infty)$, ისეთი, რომ ზღვარზე გადასვლა

$$\lim_{\varepsilon_m \to 0} g^{ij}_{\varepsilon m}(x_i, y_i) = g_0(x_i, y_i) \tag{5.7}$$

განვახორციელოთ წერტილთა ნებისმიერ $\{z_i\}$ ნაკრებზე

$$E_I = \bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcap_{q=1}^{\infty} E^{sq}$$

სიმრავლიდან, ნებისმიერი $\{u_{ij}\}$ ნაკრებისათვის B –დან, რომელსაც აქვს შესაბამისი რაოდენობის ელემენტები. აშკარაა, რომ $\mathrm{mes}E_I = \mathrm{mes}G$.

ამგვარად, მიღებული შედეგების შეჯამებით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი $u_\varepsilon(z)$ ვარიანტასათვის, რომელიც განსაზღვრულია სასრული ნაკრებებით

$$\{z_i\}, \quad u = \{u_{ij}\}, \quad \gamma = \{\gamma_i^j\}$$

$$z_i \in E_I, \quad u_{ij} \in B, \quad \gamma_i^j \ge 0$$

δI ვარიაციას აქვს სახე

$$\delta I=\sum_{i,j}\gamma_i^j\left\{\operatorname{Re}[\Delta uf(z_i,w_0(z_i),u_0(z_i),u_{ij})\psi_0(z_i)]+\right.$$
$$\left.+\Delta uF(z_i,w_0(z_i),u_0(z_i),u_{ij})\right\}. \tag{5.8}$$

ანალოგიურად შეიძლება განვსაზღვროთ L_k ფუნქციონალების პირველი ვარიაციები. ანალოგიურად ვაგებთ E_{L_k} სიმრავლეს და ზღვრული გადასვლით ვპოულობთ δL_k-ს სახეს ნებისმიერი $u_\varepsilon(z)$ ვარიანტასათვის, რომელიც განსაზღვრულია სასრული ნაკრებებით:

$$\{z_i\},\quad u=\{u_{ij}\},\quad \gamma=\{\gamma_i^j\},$$
$$z_i\in E_{L_k},\quad u_{ij}\in B,\quad \gamma_i^j\ge 0,$$
$$\delta L_k=\sum_{i,j}\gamma_i^j\left\{\operatorname{Re}[\Delta uf(z_i,w_0(z_i),u_0(z_i),u_{ij})\psi_{0k}(z_i)]+\right.$$
$$\left.+\Delta u\Phi_k(z_i,w_0(z_i),u_0(z_i),u_{ij})\right\}. \tag{5.9}$$

შემდეგისათვის, როგორი δI ან δL_k ვარიაციებიც არ უნდა განვიხილოთ, ყოველთვის ჩავთვლით, რომ $\{z_i\}$ ნაკრები ეკუთვნის შემდეგ სიმრავლეს

$$E\equiv E_I\cap\left(\bigcap_{k=1}^{r}E_{L_k}\right),$$

საიდანაც $\operatorname{mes}E=\operatorname{mes}G$.

5.3. ოპტიმალობის აუცილებელი პირობები

პარამეტრების ყოველ სასრულ ნაკრებს

$$\{z_i\},\quad \{u_{ij}\},\quad \{\gamma_i^j\},$$
$$z_i\in E,\quad u_{ij}\in B,\quad \gamma_i^j\ge 0, \tag{5.10}$$

(5.6), (5.7) ტოლობების შესაბამისად, პასუხობს ვარიაციების განსაზღვრული ნაკრები

$$\{\delta I,\ \delta L_1,.....,\delta L_r\} \tag{5.11}$$

ეს ნაკრებები, $\{\gamma_i^j\}$ პარამეტრების წრფივად დამოკიდებულებასთან კავშირში, R^{r+1} სივრცეში წარმოსახავს K კონუსს წვეროთი კოორდინატთა სათავეში.

მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ [108], რომ K კონუსი ამოზნექილია. იმ შემთხვევის ანალოგიურად, როცა მართვის არე ღია სიმრავლე იყო, განვიხილოთ ასევე ღია ამოზნექილი R სიმრავლე R^{r+1} სივრცეში

$$R = \{x_0 < 0, x_1 < 0, \ldots.., x_r < 0\},$$

რომელიც არ თანაიკვეთება K კონუსთან. ამიტომ R^{r+1} სივრცეში შეიძლება ავაგოთ ჰიპერსიბრტყე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და ყოფს ამოზნექილ, თანაუკვეთ K და R კონუსებს. ცხადია, რომ ეს ჰიპერსიბრტყე შეიძლება განვსაზღვროთ მისი ნორმალის ვექტორით

$$\vec{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \ldots., \mu_r) \in R^{r+1}$$

და ჩავთვალოთ, რომ $\vec{\mu}$ ვექტორი მიმართულია K კონუსის მხარეს. ამ შემთხვევაში

$$\begin{gathered} \mu_0 \delta I + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \delta L_i \geq 0, \\ \{\delta I, \ \ \delta L_1, \ldots, \delta L_r\} \in K. \end{gathered} \tag{5.12}$$

(5.12) უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი პარამეტრების ნაკრებისათვის, და მათ შორის, შემდეგი კონკრეტული ნაკრებისათვის

$$\{z_1\}, \quad \{u_{11}\}, \quad \{\gamma_1^1\}.$$

(5.12) უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $z_1 \in E$ და $u = u_{11} \in B$ წერტილებისათვის. აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ B ყველგან მკრივია U-ში, f, F ფუნქციები უწყვეტია მართვის მიმართ, E სიმრავლეს გააჩნია სრული ზომა G-ზე, მივიღებთ, რომ თითქმის ყველგან G-ზე სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\begin{aligned} &\mu_0 (\mathrm{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u_0)\psi_0(z)] + F(x, y, w_0, \bar{w}_0, u_0)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{r} \mu_k (\mathrm{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u_0)\psi_{0k}(z)] + \Phi_k(x, y, w_0, \bar{w}_0, u_0)) = \\ &= \inf_{u \in U} \Big\{ \mu_0 (\mathrm{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u)\psi_0(z)] + F(x, y, w_0, \bar{w}_0, u)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{r} \mu_k (\mathrm{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u)\psi_{0k}(z)] + \Phi_k(x, y, w_0, \bar{w}_0, u)) \Big\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

ყველა ზემოთ აღნიშნული გვაძლევს საშუალებას ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი მინიმუმის პრინციპი.

თეორემა_3. *თუ* $u_0(z)$- *ოპტიმალური მართვაა,* $w_0(z)$ *- ამ მართვის შესაბამისი (3.1) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ არსებობს ზემოთ განსაზღვრული* P *კონუსი* R^{r+1}-*დან, ასევე* ψ_0, ψ_{0k}, $k = \overline{1, r}$ *ფუნქციები* $L_q(\bar{G})$, $1/p + 1/q = 1$-*დან, რომლებიც*

განსაზღვრულია (4.28), (4.30) ტოლობებით, ისეთები, რომ ნებისმიერი $\mu\in P$ *ვექტორისათვის თითქმის ყველგან* G *-ზე სრულდება (5.13) თანაფარდობა.*

შედეგი. *თუ განვიხილავთ ოპტიმალური მართვის ამოცანას (3.3) ინტეგრალური შეზღუდვების გარეშე, მაშინ მინიმუმის პრინციპი ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად.*

თეორემა_4. *ვთქვათ სრულდება თეორემა_3-ის პირობები. მაშინ* $u_0(z)$ *-ის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია, რომ თითქმის ყველგან* G *-ზე სრულდებოდეს თანაფარდობა*

$$\operatorname{Re}[f(z,w_0,\bar{w}_0,u_0)\psi_0(z)+F(x,y,w_0,\bar{w}_0,u_0)]=$$
$$=\inf_{u\in U}\operatorname{Re}[f(z,w_0,\bar{w}_0,u)\psi_0(z)+F(x,y,w_0,\bar{w}_0,u)]$$

6. შეუღლებული განტოლების აგება დიფერენციალური ფორმით

წინა პარაგრაფში $\psi_0,\psi_{0k}\in L_q(G),\ k=\overline{1,r}$ ფუნქციებისათვის აგებული იყო შემდეგი ოპერატორული თანაფარდობები:

$$\psi_0=(S_0^{-1})^*T_0, \tag{6.1}$$

$$\psi_{0k}=(S_0^{-1})^*T_{0k},\quad k=\overline{1,r}, \tag{6.2}$$

რომლებშიც $L_p^*(G)$ შეუღლებული სივრცე ექვივალენტურია $L_q(G),\ \ 1/p+1/q=1$ სივრცეს.

(6.1) და (6.2) თანაფარდობებიდან შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ტოლობები:

$$\langle\psi,S_0w\rangle=\langle T_0,w\rangle,\quad \psi\in L_p^*(G), \tag{6.3}$$

$$\langle\psi_k,S_0w\rangle=\langle T_0,w\rangle,\quad \psi_k\in L_p^*(G),\quad k=\overline{1,r}, \tag{6.4}$$

ნებისმიერი $w\in C_\alpha^p(\bar{G})$ –სათვის.

რისის თეორემის [84] საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ არსებობს ერთადერთი ელემენტი $L_q(G)$ სივრციდან, რომელიც $\psi\in L_p^*(G)$, $1/p+1/q=1$ ელემენტის, რომლისთვისაც (6.3) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\operatorname{Re}\iint_G\psi(z)S_0w\,dxdy=\langle T_0,w\rangle. \tag{6.5}$$

ანალოგიურად (6.4) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\mathrm{Re}\iint\limits_G \psi_k(z)S_0 w\,dxdy=\langle T_0,w\rangle,\quad k=\overline{1,r}\,. \tag{6.6}$$

S_0 ოპერატორის და T_0 ფუნქციონალის სახის გათვალისწინებით (6.5) და (6.5) ტოლობები შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\iint\limits_G \psi(z)\left[\partial_{\bar z}w-\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}w-\frac{\partial f(u_0)}{\partial \bar w}\bar w\right]dxdy=\\ =2\iint\limits_G \mathrm{Re}\left[\partial_w F(u_0)w\right]dxdy,\end{gathered} \tag{6.7}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\iint\limits_G \psi_k(z)\left[\partial_{\bar z}w-\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}w-\frac{\partial f(u_0)}{\partial \bar w}\bar w\right]dxdy=\\ =2\iint\limits_G \mathrm{Re}\left[\partial_w \Phi_k(u_0)w\right]dxdy,\quad k=\overline{1,r}\,.\end{gathered} \tag{6.8}$$

თუ გამოვიყენებთ გრინის ფორმულას [76],

$$\mathrm{Re}\iint\limits_G \psi(z)\partial_{\bar z}w\,dxdy=\frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma \psi w\,dz-\iint\limits_G w\partial_{\bar z}\psi\,dxdy,$$

(6.7) და (6.8) თანაფარდობებიდან ნებისმიერი $w\in C^p_\mu(\bar G)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ ტოლობებს

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma w\psi\,dz\right]-\mathrm{Re}\iint\limits_G\left[w\partial_{\bar z}\psi+w\psi\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}+\bar w\psi\frac{\partial f(u_0)}{\partial \bar w}\right]dxdy=\\ =2\,\mathrm{Re}\iint\limits_G\left[w\partial_w F(u_0)\right]dxdy,\end{gathered} \tag{6.9}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma w\psi_k\,dz\right]-\mathrm{Re}\iint\limits_G\left[w\partial_{\bar z}\psi_k+w\psi\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}+\bar w\psi_k\frac{\partial f(u_0)}{\partial \bar w}\right]dxdy=\\ =2\,\mathrm{Re}\iint\limits_G\left[w\partial_w \Phi_k(u_0)\right]dxdy,\quad k=\overline{1,r}\,.\end{gathered} \tag{6.10}$$

(6.9) და (6.10) ტოლობები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma \psi w\,dz\right]-\\ -\mathrm{Re}\iint\limits_G\left[\partial_{\bar z}\psi+\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}\psi+\frac{\partial \bar f(u_0)}{\partial \bar w}\bar\psi+2\partial_w F(u_0)\right]w\,dxdy=0.\end{gathered} \tag{6.11}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma \psi_k w\,dz\right]-\\ -\mathrm{Re}\iint\limits_G\left[\partial_{\bar z}\psi_k+\frac{\partial f(u_0)}{\partial w}\psi_k+\frac{\partial \bar f(u_0)}{\partial \bar w}\bar\psi_k+2\partial_w \Phi_k(u_0)\right]w\,dxdy=0,\quad k=\overline{1,r}\,.\end{gathered} \tag{6.12}$$

რადგან (6.11) და (6.12) ტოლობები სამართლიანია ნებისმიერი $w \in C_{\alpha}^{p}(\bar{G})$ ფუნქციისათვის, ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ

$$\begin{gathered}\partial_{\bar{z}}\psi + \frac{\partial f(u_0)}{\partial w}\psi + \frac{\partial \bar{f}(u_0)}{\partial \bar{w}}\bar{\psi} = -2\partial_w F(u_0), \quad z \in G, \\ \operatorname{Re}\left[\lambda(z)\psi(z)\right] = 0, \quad z \in \Gamma.\end{gathered} \tag{6.13}$$

$$\begin{gathered}\partial_{\bar{z}}\psi_k + \frac{\partial f(u_0)}{\partial w}\psi_k + \frac{\partial \bar{f}(u_0)}{\partial \bar{w}}\bar{\psi}_k = -2\partial_w \Phi_k(u_0), \quad z \in G, \\ \operatorname{Re}\left[\lambda(z)\psi_k(z)\right] = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = \overline{1,r}.\end{gathered} \tag{6.14}$$

შეუღლებული განტოლებების აგების შემდეგ თეორემა_1, თეორემა_2 და თეორემა_3 შესაბამისად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

თეორემა_4. *თუ* $u_0(z)$ *- ოპტიმალური მართვაა,* $w_0(z)$ *– ამ მართვის შესამამისი (3.1) ამოცანის ამონახსნია, მაშინ არსებობს ზემოთ განსაზღვრული* P *კონუსი* R^{r+1} *-დან და* ψ_0, ψ_{0k}, $k = \overline{1,r}$ *ფუნქციები* $L_q(\bar{G})$ *-დან, რომლებიც არის (6.13) და (6.14) განტოლების ამონახსნები, ისეთი, რომ ნებისმიერი* $\mu \in P$ *ვექტორისათვის თითქმის ყველგან* G *-ზე სრულდება (4.37) ტოლობა.*

თეორემა_5. *თუ* $u_0(z)$*- ოპტიმალური მართვაა,* $w_0(z)$ *- ამ მართვის შესაბამისი (3.1) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ არსებობს ზემოთ განსაზღვრული* P *კონუსი* R^{r+1} *-დან, ასევე* ψ_0, ψ_{0k}, $k = \overline{1,r}$ *ფუნქციები* $L_q(\bar{G})$, $1/p + 1/q = 1$ *-დან, რომლებიც არის (6.13) და (6.14) განტოლების ამონახსნები, ისეთები, რომ ნებისმიერი* $\mu \in P$ *ვექტორისათვის თითქმის ყველგან* G *-ზე სრულდება (5.13) თანაფარდობა.*

შედეგი. *თუ განვიხილავთ ოპტიმალური მართვის ამოცანას (3.3) ინტეგრალური შეზღუდვების გარეშე, მაშინ მინიმუმის პრინციპი ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად.*

თეორემა_6. *ვთქვათ სრულდება თეორემა_5-ის პირობები. მაშინ* $u_0(z)$ *-ის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია, რომ თითქმის ყველგან* G *-ზე სრულდებოდეს თანაფარდობა*

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u_0)\psi_0(z) + F(x, y, w_0, \bar{w}_0, u_0)] = \\ &= \inf_{u \in U} \operatorname{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u)\psi_0(z) + F(x, y, w_0, \bar{w}_0, u)]\end{aligned}$$

7. ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

ვთქვათ $\overline{G}$ არის მართკუთხედი $\{z = x + iy:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, Γ - G-ს საზღვარი, ხოლო $\gamma_0 = \{z_0 = x_0 + iy:\ 0 \le y \le 1\}$, $\gamma_1 = \{z = 1 + iy:\ 0 \le y \le 1\}$, $\gamma_2 = \{z = x + i:\ 0 \le x \le 1\}$, $\gamma_3 = \{z = iy:\ 0 \le y \le 1\}$, $\gamma_4 = \{z = x:\ 0 \le x \le 1\}$, $z^* \in \Gamma \setminus \gamma_1$.

დავუშვათ ასევე, რომ U- რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლეა E-დან. ყოველ $\omega(z): G \to U$ ფუნქციას ვუწოდოთ მართვა. U სიმრავლეს ეწოდება მართვის არე. $u(z)$ ფუნქციას ვუწოდოთ შესაძლო მართვა, თუ $\omega(z) \in L_p(G),\ p > 2$. ყველა დასაშვებ მართვათა სიმრავლე აღვნიშნოთ Ω-თი.

ყოველი ფიქსირებული $\omega \in \Omega$-თვის $\overline{G}$ არეში განვიხილოთ ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანა პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\overline{z}} w + B(z)\overline{w} = f(z)\omega,\ z \in G,\\
&\mathrm{Re}[w(z)] = g(z),\ z \in \Gamma \setminus \gamma_1,\\
&\mathrm{Re}[w(z_1)] = \sigma\, \mathrm{Re}[w(z_0)],\ z_0 \in \gamma_0,\ \ z_1 \in \gamma_1,\\
&\mathrm{Im}[w(z^*)] = \mathrm{const},\ \ 0 < \sigma = \mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

ვთქვათ $c(z), d(z), B(z), f(z) \in L_p(\overline{G}),\ p > 2,\quad g(z) \in C_\mu(\Gamma \setminus \gamma_1),\quad 0 < \mu < 1$. მაშინ ყოველი ფიქსირებული $\omega \in \Omega$-თვის $\overline{G}$ არეში (7.1) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეკუთვნის $C_\mu(\overline{G})$ სივრცეს.

განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$
I(\omega) = \mathrm{Re} \iint_G [c(z)w(z) + d(z)\omega(z)]dxdy \tag{7.2}
$$

და დავსვათ ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ ისეთი $\omega_0(z) \in \Omega$ ფუნქცია, რომლითაც (7.1) ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის $w_0(z)$ ამონახსნი (7.2) ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

თეორემა_7. ვთქვათ $c(z), d(z), B(z), f(z) \in L_p(\overline{G}),\ p > 2,\ \ g(z) \in C_\alpha(\Gamma \setminus \gamma_1),\ \ 0 < \mu < 1$ *და* $\rho(x)\psi(z)$ *არის შემდეგი შეუღლებული ამოცანის ამონახსნი:*

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}(\rho(x)\psi(z)) - \overline{B}(z)\rho(x)\psi(z) = c(z),\\
&\mathrm{Re}[\rho(x)\psi(z)] = 0,\ \ z\in \gamma_2 \cup \gamma_4,\\
&\mathrm{Re}[i\rho(x)\psi(z)] = 0,\ \ z\in \gamma_3 \cup \gamma_1,\\
&\mathrm{Re}[\rho(x)\psi(z_0^+) - \rho(x)\psi(z_0^-)] = \sigma\,\mathrm{Re}[\rho(x)\psi(z)],\ z_0\in\gamma_0,\ z\in\gamma_1,
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

მაშინ $\omega_0(z)$*,* $w_0(z)$ *წყვილის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია და საკმარისი თითქმის ყველგან* G *-ზე შემდეგი მინიმუმის პრინციპის შესრულება:*

$$
\mathrm{Re}[(d(z) - \rho(x)\psi(z)f(z))\omega_0(z)] = \inf_{\omega\in U} \mathrm{Re}[(d(z) - \rho(x)\psi(z)f(z))\omega(z)]\,.
$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\omega_0(z)\in\Omega$ - ოპტიმალური მართვაა, $\omega_\varepsilon(z)\in\Omega$ - რაიმე დასაშვები მართვაა, $w_0(z),\ w_\varepsilon(z)$ - (7.1) ამოცანის ამონახსნებია, რომლებიც შეესაბამებიან $\omega_0(z)$, $\omega_\varepsilon(z)$ მართვებს. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\Delta w(z) = w_\varepsilon(z) - w_0(z)$, $\Delta\omega(z) = \omega_\varepsilon(z) - \omega_0(z)$. მაშინ მივიღებთ შემდეგ ამოცანას:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}\Delta w + B(z)\Delta\overline{w} = f(z)\omega,\ z\in G,\\
&\mathrm{Re}[\Delta w(z)] = g(z),\ z\in \Gamma\setminus\gamma_1,\\
&\mathrm{Re}[\Delta w(z_1)] = \sigma\,\mathrm{Re}[\Delta w(z_0)],\ z_0\in\gamma_0,\ \ z_1\in\gamma_1,\\
&\mathrm{Im}[\Delta w(z^*)] = \mathrm{const},\ \ 0<\sigma=\mathrm{const}\,.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

შემოვიტანოთ დადებითი x არგუმენტის $\rho(x)$ დადებითი წონითი ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$
\rho(x) = \begin{cases} \rho_1(x), & 0\le x\le x_0,\\ \rho_2(x), & x_0 < x \le 1,\end{cases}
$$

$$
\rho_1(x)\in C_\alpha[0,x_0],\ \ \rho_2(x)\in C_\alpha[x_0,1],\ \lim_{x\to x_0^-}\rho_1(x) \ne \lim_{x\to x_0^+}\rho_2(x)\,.
$$

ვთქვათ $\psi(z) = \psi_1(x,y) + i\,\psi_2(x,y) \ne 0$ რაიმე ინტეგრირებადი ფუნქციაა. (7.4) განტოლების $\rho(x)\psi(z)$ -ზე სკალარული გამრავლებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$
\mathrm{Re}\iint_G \rho(x)\psi(z)[\partial_{\bar{z}}\Delta w + B(z)\Delta\overline{w}]dxdy = \mathrm{Re}\iint_G \rho(x)\psi(z)f(z)\Delta\omega dxdy \tag{7.5}
$$

ფიქსირებული $\omega_0(z)$ და $\omega_\varepsilon(z)$ -სათვის ვიპოვოთ (7.2) ფუნქციონალის ნაზრდი.

$$
\Delta I = I(\omega_\varepsilon) - I(\omega_0) = \mathrm{Re}\iint_G [c(z)\Delta w(z) + d(z)\Delta\omega(z)]dxdy
$$

(7.5) თანაფარდობის გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\Delta I=\operatorname{Re}\iint_G\left[\rho(x)\psi(z)\partial_{\bar z}\Delta w+\left(c(z)+\rho(x)\overline{B\psi}(z)\right)\Delta w\right]dxdy+$$
$$+\operatorname{Re}\iint_G\Delta\omega(z)\left(d(z)-\rho(x)\psi(z)f(z)\right)dxdy \tag{7.6}$$

ვთქვათ $\Delta w=u+iv$ და განვიხილოთ (7.6) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები:

$$\operatorname{Re}\iint_G\rho(x)\psi(z)\partial_{\bar z}\Delta w dxdy=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\left[\rho(x)\psi_1(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\rho(x)\psi_2(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dxdy \tag{7.7}$$

შემდეგ (7.4)-დან სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int_0^1\int_0^1\left[\rho(x)\psi_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}-\rho(x)\psi_2(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}\right]dxdy=$$
$$\int_0^1\left[\int_0^{x_0}\left(\rho_1(x)\psi_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}-\rho_1(x)\psi_2(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0}^1\left(\rho_2(x)\psi_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}-\rho_2(x)\psi_2(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\right]dy=$$
$$=\int_0^1\Big\{\ \rho_1(x_0^-)\psi_1(x_0^-,y)u(x_0,y)-\rho_1(0)\psi_1(0,y)u(0,y)-\rho_1(x_0^-)\psi_2(x_0^-,y)v(x_0,y)+$$
$$+\rho_1(0)\psi_2(0,y)v(0,1)-\int_0^{x_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1\psi_1)u-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1\psi_2)v\right]+$$
$$+\rho_2(1)\psi_1(1,y)u(1,y)-\rho_2(x_0^+)\psi_1(x_0^+,y)u(x_0,y)-\rho_2(1)\psi_2(1,y)v(1,y)+$$
$$+\rho_2(x_0^+)\psi_2(x_0^+,y)v(x_0,y)-\int_{x_0}^1\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_2\psi_1)u-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_2\psi_2)v\right]dx\Big\}dy=$$
$$=\int_0^1\Big\{\ \left[\rho_1(x_0^-)\psi_1(x_0^-,y)-\rho_2(x_0^+)\psi_1(x_0^+,y)+\sigma\rho_2(1)\psi_1(1,y)\right]u(x_0,y)+$$
$$+\left[\rho_2(x_0^+)\psi_2(x_0^+,y)-\rho_1(x_0^-)\psi_2(x_0^-,y)\right]v(x_0,y)-$$
$$-\rho_1(0)\psi_2(0,y)v(0,y)-\rho_2(1)\psi_2(1,y)v(1,y)-$$
$$-\int_0^{x_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\psi_1)u-\frac{\partial}{\partial x}(\rho\psi_2)v\right]dx-\int_{x_0}^1\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\psi_1)u-\frac{\partial}{\partial x}(\rho\psi_2)v\right]dx\Big\}dy$$

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი ტოლობა:

$$\int_0^1\int_0^1\left[\rho(x)\psi_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+\rho(x)\psi_1(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}\right]dydx=$$

$$=\int_0^{x_0}\left\{-\rho(x)\psi_1(x,0)v(x,0)+\rho(x)\psi_1(x,1)v(x,1)-\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial y}(\rho\psi_2)u+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\psi_1)v\right]dy\right\}dx+$$

$$+\int_{x_0}^1\left\{-\rho(x)\psi_1(x,0)v(x,0)+\rho(x)\psi_1(x,1)v(x,1)-\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial y}(\rho\psi_2)u+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\psi_1)v\right]dy\right\}dx$$

მოვითხოვოთ შემდეგი პირობების შესრულება:

$$\rho_1(x_0^-)\psi_1(x_0^-,y)-\rho_2(x_0^+)\psi_1(x_0^+,y)+\sigma\rho_2(1)\psi_1(1,y)=0,$$

$$\rho_2(x_0^+)\psi_2(x_0^+,y)-\rho_1(x_0^-)\psi_2(x_0^-,y)=0,$$

$$\rho_1(0)\psi_2(0,y)=0,\ \rho_2(1)\psi_2(1,y)=0, \tag{7.8}$$

$$\rho(x)\psi_1(x,0)=0,\ \rho(x)\psi_1(x,1)=0.$$

ზემოაღნიშნულის გათვალისწინებით (7.7) ტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\iint_G\rho(x)\psi(z)\partial_{\bar z}\Delta w dxdy=-\operatorname{Re}\iint_{G_1}\partial_{\bar Z}(\rho(x)\psi(z))\Delta w dxdy-\\-\operatorname{Re}\iint_{G_2}\partial_{\bar Z}(\rho(x)\psi(z))\Delta w dxdy,\end{aligned} \tag{7.9}$$

სადაც

$$\overline{G}_1=\{z=x+iy:\ 0\le x\le x_0,\ 0\le y\le 1\},$$

$$\overline{G}_2=\{z=x+iy:\ x_0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}.$$

(7.9) ფორმულის გამოყენებით ΔI ფუნქციონალის ნაზრდისათვის (7.6)-დან მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\begin{aligned}\Delta I=\operatorname{Re}\iint_{G_1}\left[-\partial_{\bar Z}(\rho(x)\psi(z))+C(z)+\rho(x)\overline{B}(z)\overline{\psi}(z)\right]\Delta w dxdy+\\+\operatorname{Re}\iint_G\Delta\omega(z)\left(d(z)-(\rho(x)\psi(z)f(z)\right)dxdy+\\+\operatorname{Re}\iint_{G_2}\left[-\partial_{\bar Z}(\rho(x)\psi(z))+C(z)+\rho(x)\overline{B}(z)\overline{\psi}(z)\right]\Delta w dxdy\end{aligned} \tag{7.10}$$

განვიხილოთ შემდეგი განტოლება

$$\partial_{\bar Z}(\rho(x)\psi(z))-\overline{B}(z)(\rho(x)\overline{\psi}(z))=c(z) \tag{7.11}$$

და ფუნქცია

$$\psi_i(x,y)=\begin{cases}\psi_i^{(1)}(x,y) & (x,y)\in G_1,\\ \psi_i^{(2)}(x,y) & (x,y)\in G_2\end{cases}\qquad i=1,2.$$

სადაც $\rho_1(\psi_1^{(1)}+i\psi_2^{(1)})$ - (7.11) განტოლების ამონახსნია G_1 არეში, ხოლო $\rho_2(\psi_1^{(2)}+i\psi_2^{(2)})$ - G_2 არეში. ვიგულისხმოთ, რომ $\rho(x)\psi(z)$ ფუნქცია ასევე აკმაყოფილებს (7.8) პირობებს. ამ შემთხვევაში (7.10)-დან ΔI ფუნქციონალის ნაზრდი მიიღებს სახეს:

$$\Delta I=\mathrm{Re}\iint_G \Delta\omega(z)\left[d(z)-\rho(x)\psi(z)f(z)\right]dxdy \tag{7.12}$$

მე–4 და მე–5 პარაგრაფში მოყვანილი მსჯელობების განმეორებით შეიძლება დავამტკიცოთ თეორემის სამართლიანობა (აუცილებელი პირობის სამართლიანობა). აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ პირობის საკმარისობა ნებისმიერი $\omega_\varepsilon\in\Omega$ -თვის უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან

$$\Delta I=I(\omega_\varepsilon)-I(\omega_0)=\mathrm{Re}\iint_G \Delta\omega(z)\left[d(z)-\rho(x)\psi(z)f(z)\right]dxdy \tag{7.13}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თავი I I. ოპტიმალური მართვის ამოცანა ელიფსური განტოლებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობით

1. ოპტიმალური მართვის ამოცანის დასმა

ვთქვათ $\overline{G}$ არე არის მართკუთხედი, $\overline{G}=[0,1]\times[0,1]$, Γ - G არის საზღვარი, $0<x_0<1$, $\gamma_0=\{(x_0,y):\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma=\{(1,y):\ 0\le y\le 1\}$, $A_1(x,y),\ A_2(x,y)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$, $0\ge A_3(x,y)\in L_\infty(\overline{G})$, $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ d(x,y)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$, U - რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლე R-დან. ყოველ $\omega(x,y):G\to U$ ფუნქციას ვუწოდებთ მართვას. U სიმრავლეს ეწოდება მართვის არე. $\omega(x,y)$ ფუნქციას ვუწოდებთ დასაშვებ მართვას, თუ $\omega(x,y)\in L_p(G),\ p>2$. Ω–თი აღვნიშნავთ ყველა დასაშვები მართვის სიმრავლეს.

ყოველი ფიქსირებული $\omega\in\Omega$-სთვის $\overline{G}$ არეში ელიფსური განტოლებისათვის განვიხილოთ ბიწაძე–სამარსკის შემდეგი ამოცანა:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+A_3(x,y)u=\\ =a(x,y)\omega(x,y)+b(x,y),\quad (x,y)\in G,\\ u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,\\ u(1,y)=\sigma u(x_0,y),\quad 0\le y\le 1,\ \sigma>0.\end{gathered}\tag{1.1}$$

განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$I(\omega)=\iint\limits_G[c(x,y)u(x,y)+d(x,y)\omega(x,y)]dxdy\tag{1.2}$$

და დავსვათ ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ისეთი $\omega_0(x,y)\in\Omega$ ფუნქცია, რომლითაც (1.1) ამოცანის $u_0(x,y)$ ამონახსნი (1.2) ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $\omega_0(x,y)\in\Omega$ ფუნქციას ვუწოდებთ ოპტიმალურ მართვას, ხოლო შესაბამის $u_0(x,y)$ ამონახსნს - ოპტიმალურ ამონახსნს.

თეორემა_1. ვთქვათ $\psi_0(x,y)$ *არის შემდეგი შეუღლებული განტოლების ამონახსნი*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}+A_3(x,y)\psi=-c(x,y),\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,$$
$$\psi(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma, \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial\psi(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial\psi(1,y)}{\partial x},\quad 0\le y\le 1,$$

მაშინ (u_0,ω_0) *წყვილის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მინიმუმის პრინციპის შესრულება*

$$\inf_{\omega\in U}[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega=[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega_0 \tag{1.4}$$

თითქმის ყველგან G *–ზე* [102].

2. შეუღლებული განტოლების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

განვიხილოთ (1.3) შეუღლებული ამოცანა, ამ ამოცანის ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად $\psi=w+w^*$, სადაც w^*– დირიხლეს შემდელი ამოცანის ამონახსნია:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial w^*}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial w^*}{\partial y}+A_3(x,y)w^*=-c(x,y),\quad (x,y)\in G, \tag{2.1}$$
$$w^*(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma,$$

ხოლო w – არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნია:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}+A_3(x,y)w=0,\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,$$
$$w(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma, \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial w(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial w(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial w(1,y)}{\partial x}+\sigma\frac{\partial w^*(1,y)}{\partial x},\quad 0\le y\le 1.$$

როგორც ცნობილია [95], (2.1) ამოცანას აქვს ერთადერთი $w^*(x,y)\in W_2^2(G)$ ამონახსნი. ამიტომაც გამოსაკვლევი გვრჩება (2.2) ამოცანა. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი:

$$\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial w^{k+1}}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial w^{k+1}}{\partial y}+A_3(x,y)w^{k+1}=0,\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,$$

$$w^{k+1}(x,y)=0,\ (x,y)\in\Gamma, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial w^{k+1}(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial w^{k+1}(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial w^k(1,y)}{\partial x}+\varphi(y),\quad 0\le y\le 1,\quad k=0,1,2,...,$$

სადაც $\varphi(y)=\sigma\dfrac{\partial w^*(1,y)}{\partial x}$, $w^0(x,y)$ - საწყისი მიახლოებაა.

ვთქვათ $z^{(k)}(x,y)=w^{(k+1)}(x,y)-w^{(k)}(x,y)$, მაშინ (2.3) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z^k}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial z^k}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial z^k}{\partial y}+A_3(x,y)z^k=0,\qquad (x,y)\in G\setminus\gamma_0$$

$$z^{(k)}(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma,$$

$$\frac{\partial z^{(k)}(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial z^{(k)}(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial z^{(k-1)}(1,y)}{\partial x},\quad 0\le y\le 1,\quad k=1,2,3,...$$

ეს ამოცანა ექვივალენტურია შემდეგი ამოცანის [77], [119]:

$$\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z^k}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial z^k}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial z^k}{\partial y}+A_3(x,y)z^k=$$

$$=\sigma\delta(x_0-x)\frac{\partial z^{k-1}(1,y)}{\partial x},\quad (x,y)\in G, \tag{2.4}$$

$$z^k(x,y)=0,\ (x,y)\in\Gamma,\ \ k=0,1,2,...,$$

სადაც $\delta(x_0-x)$ - დირაკის ფუნქციაა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x,y)=\sigma\delta(x_0-x)\frac{\partial z^{k-1}(1,y)}{\partial x}.$$

რადგანაც $f(x,y)\in W_2^{-1}(G)$, ამიტომ (2.4) ამოცანის ამონახსნი არსებობს, ერთადერთია და ეკუთვნის $\overset{0}{W}{}_2^1(G)$ სივრცეს [95]. გარდა ამისა, თუ $G(x,y,\xi,\eta)$ არის (2.4) ამოცანის გრინის ფუნქცია $f=0$–სათვის, მაშინ ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$z^{(k)}(x,y)=\iint_G\sigma G(x,y,\xi,\eta)\delta(x_0-\xi)\frac{\partial z^{k-1}(1,\eta)}{\partial x}d\xi d\eta=$$

$$=\int_0^1\sigma G(x,y,x_0,\eta)\frac{\partial z^{k-1}(1,\eta)}{\partial x}d\eta. \tag{2.5}$$

გრინის ფუნქციის თვისებების [77], [119] გათვალისწინებით, (2.6) ტოლობიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ $z^k(x,y)\in W_2^2(G\setminus\gamma_0)\cap\overset{0}{W}{}_2^1(G)$, ამიტომაც განისაზღვრება

ფუნქციის კვალი $\frac{\partial}{\partial x} z^k(1,y)$, რომელიც ეკუთვნის $W_2^{1\backslash 2}(0,1)$ სივრცეს. ამ შენიშვნის გათვალისწინებით, (2.6)–დან შეიძლება დავწეროთ

$$\frac{\partial z^k(1,y)}{\partial x} = \int_0^1 \sigma \frac{\partial G(1,y,x_0,\eta)}{\partial x} \cdot \frac{\partial z^{k-1}(1,\eta)}{\partial x} d\eta \tag{2.7}$$

კოში–ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით, (2.7) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial z^k(1,y)}{\partial x}\right]^2 dy \le \sigma^2 \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{\partial G(1,y,x_0,\eta)}{\partial x}\right]^2 d\eta dy \times \int_0^1 \left[\frac{\partial z^{k-1}(1,\eta)}{\partial x}\right]^2 d\eta \tag{2.8}$$

აღვნიშნოთ

$$q = \sigma \left\| \frac{\partial G(1,y,x_0,\eta)}{\partial x} \right\|_{L_2([0,1]\times[0,1])},$$

მაშინ, (2.8) უტოლოდან, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას

$$\left\| \frac{\partial z^k(1,y)}{\partial x} \right\|_{L_2[0,1]} \le q \left\| \frac{\partial z^{k-1}(1,y)}{\partial x} \right\|_{L_2[0,1]}. \tag{2.9}$$

ვთქვათ, $\sigma < 1/\left\| \frac{\partial}{\partial x}(G(1,y,x_0,\eta)) \right\|$, მაშინ $q<1$ და (2.9) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(z^k(1,y)\right)$ მწკრივი კრებადია. ეს კი ნიშნავს, რომ კრებადია $\left\{\frac{\partial w^k(1,y)}{\partial x}\right\}$ მიმდევრობა $L_2[0,1]$ ნორმით, სადაც

$$\frac{\partial w^k(1,y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{\partial w^{i+1}(1,y)}{\partial x} - \frac{\partial w^i(1,y)}{\partial x}\right] + \frac{\partial w^0(1,y)}{\partial x}.$$

ამდენად, (2.6) ტოლობიდან გამომდინარეობს $\sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(x,y)$ მწკრივის კრებადობა, და ამასთანავე $\{w^{(k)}(x,y)\}$ იტერაციული მიმდევრობის კრებადობაც:

$$\lim_{k\to\infty} w^{(k)}(x,y) = w(x,y)$$

სადაც $w(x,y) \in W_2^2(G \setminus \gamma_0) \cap \overset{0}{W}{}_1^2(G)$. მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, $w(x,y)$ ფუნქცია, არის (2.2) ამოცანის ამონახსნი.

დავამტკიცოთ ამონახსნის ერთადერთობა. ვათქვათ $w_1(x,y)$ და $w_2(x,y)$ არის (2.2) ამოცანის ორი განსხვავებული განზოგადოებული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $z(x,y)=w_1(x,y)-w_2(x,y)$ არის შემდეგი ამოცანის ამონახსნი:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+A_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+A_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+A_3(x,y)z=0,\ \ (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\
&z(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\\
&\frac{\partial z(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial z(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial z(1,y)}{\partial x},\ \ 0\le y\le 1.
\end{aligned}$$

წინა მსჯელობის განმეორებით მივიღებთ, რომ $z(x,y)=0$. ამდაგვარად დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა_2. ვთქვათ $0<\sigma\le\sigma_0$, *მაშინ (1.3) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეკუთვნის* $W_2^2(G\setminus\gamma_0)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(G)$ *სივრცეს.*

3. ოპტიმალური მართვის ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის

3.1. ოპტიმალური მართვის ამოცანის დასმა

ვთქვათ $\overline{G}$ არე არის მართკუთხედი, $\overline{G}=[0,1]\times[0,1]$, Γ - G არის საზღვარი, $0<x_0<1$, $\gamma_0=\{(x_0,y):\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma=\{(1,y):\ 0\le y\le 1\}$, $0\le q(x,y)\in L_\infty(\overline{G})$ $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ d(x,y)\in L_p(\overline{G}),\ p>2$.

ყოველი ფიქსირებული $\omega\in\Omega$ - თვის $\overline{G}$ არეში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის განვიხილოთ ბიწაძე–სამარსკის შემდეგი ამოცანა:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-q(x,y)u=a(x,y)\omega(x,y)+b(x,y),\ \ (x,y)\in G,\\
&u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,\\
&u(1,y)=\sigma u(x_0,y),\ \ 0\le y\le 1,\ \sigma>0.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$I(u)=\iint_G [c(x,y)u(x,y)+d(x,y)\omega(x,y)]dxdy \tag{3.2}$$

და დავსვათ ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ისეთი $\omega_0(x,y)\in\Omega$ ფუნქცია, რომლითაც (3.1) ამოცანის ამონახსნი (3.2) ფუნქციონალს მიანიჭებს

მინიმალურ მნიშვნელობას. $\omega_0(x,y)\in\Omega$ ფუნქციას ვუწოდებთ ოპტიმალურ მართვას, ხოლო შესაბამის $u_0(x,y)$ ამონახსნს - ოპტიმალურ ამონახსნს.

თეორემა_3. ვთქვათ $\psi_0(x,y)$ არის შემდეგი შეუღლებული განტოლების ამონახსნი

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-q(x,y)\psi=-c(x,y), \quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\ &\psi(x,y)=0, \ (x,y)\in\Gamma,\\ &\frac{\partial\psi(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial\psi(1,y)}{\partial x}, \quad 0\le y\le 1,\end{aligned} \tag{3.3}$$

მაშინ (u_0,ω_0) –ის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მინიმუმის პრინციპის შესრულება

$$\inf_{\omega\in U}[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega=[d(x,y)+a(x,y)\psi_0(x,y)]\omega_0 \tag{3.4}$$

თითქმის ყველგან G –ზე.

3.2. ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი

ოპტიმალური მართვის ამოცანის ამოხსნის სქემა:

- დასაწყისში ვხსნით (3.3) ამოცანას $\psi_0(x,y)$ ამონახსნის საპოვნელად;

- $\psi_0(x,y)$ ამონახსნის დახმარებით (3.4)-დან ვპოულობთ ოპტიმალურ მართვას $\omega_0(x,y)$;

- ვხსნით (3.1) ამოცანას $u_0(x,y)$ ოპტიმალური ამონახსნის საპოვნელად.

(3.3) შეუღლებული ამოცანის ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად $\psi=w+w^*$, სადაც w^* – დირიხლეს ამოცანის ამონახსნია:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}-q(x,y)w^*=-c(x,y), \quad (x,y)\in G,\\ &w^*(x,y)=0, \quad (x,y)\in\Gamma,\end{aligned} \tag{3.5}$$

ხოლო w – არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნია:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-q(x,y)w=0, \quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\ &w(x,y)=0, \ (x,y)\in\Gamma,\\ &\frac{\partial w(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial w(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial w(1,y)}{\partial x}+\sigma\frac{\partial w^*(1,y)}{\partial x}, \quad 0\le y\le 1.\end{aligned} \tag{3.6}$$

როგორც ცნობილია [95], (2.1) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეკუთვნის $W_2^2(G)$ სივრცეს. (3.6) ამოცანის ამოხსნისათვის განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial y^2}-q(x,y)w^{k+1}=0,\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\
&w^{k+1}(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\\
&\frac{\partial w^{k+1}(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial w^{k+1}(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial w^k(1,y)}{\partial x}+\varphi(y),\quad 0\le y\le 1,\quad k=0,1,2,...,
\end{aligned}\tag{3.7}$$

სადაც $\varphi(y)=\sigma\dfrac{\partial w^*(1,y)}{\partial x}$, $w^0(x,y)$ - საწყისი მიახლოებაა.

(3.7) ამოცანა ექვივალენტურია შემდეგი ამოცანის [77], [119]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial y^2}-q(x,y)w^{k+1}=\delta(x_0-x)\left(\sigma\frac{\partial w^k(1,y)}{\partial x}+\varphi(y)\right),\quad (x,y)\in G,\\
&w^{k+1}(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\quad k=0,1,2,...\ ,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

სადაც $\delta(x_0-x)$ - დირაკის ფუნქციაა.

(3.1) ამოცანის ამოხსნისათვის განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u^{k+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^{k+1}}{\partial y^2}-q(x,y)u^{k+1}=a(x,y)\omega+b(x,y),\quad (x,y)\in G,\\
&u^{k+1}(x,y)=0,\qquad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,\\
&u^{k+1}(1,y)=\sigma u^k(x_0,y),\quad 0\le y\le 1,\quad \sigma>0,\ \ k=0,1,2,...\ .
\end{aligned}\tag{3.9}$$

3.3. რიცხვითი რეალიზაცია Mathcad–ის გამოყენებით.

(3.8) და (3.9) ამოცანების ამოხსნისათვის იტერაციის ყოველ ბიჯზე ვიყენებთ Mathcad-ის **relax(a, b, c, d, e, f, u, rjac)** [49], [52], [104], [109] ფუნქციას.

Relax ფუნქციას შედეგში გამოაქვს კვადრატული მატრიცა, სადაც ელემენტების განლაგება შეესაბამება კვადრატული არის კვანძებს, ხოლო მნიშვნელობები – ამ კვანძებში მიახლოებით ამონახსნებს.

relax ფუნქციას აქვს შემდეგი არგუმენტები:

a, b, c, d, e - ერთიდაიგივე ზომის კვადრატული მატრიცები, რომლებიც შეიცავენ დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტებს. კერძოდ, ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის კოეფიციენტები $a_{i,j}=b_{i,j}=c_{i,j}=d_{i,j}=1$, $e_{i,j}=-4-q_{i,j}$, სადაც $q_{i,j}$

არის $q(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობები შესაბამის კვანძებში.

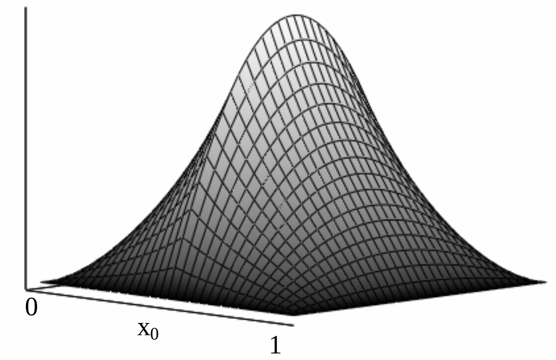
f - კვადრატული მატრიცა, რომელიც შეიცავს განტოლების მარჯვენა მხარის მნიშვნელობებს შესაბამის კვანძებში.

u - კვადრატული მატრიცა, რომელიც შეიცავს ფუნქციის მნიშვნელობებს საზღვრის კვანძებში, ასევე საწყისი მიახლოებებს შიდა კვანძებში.

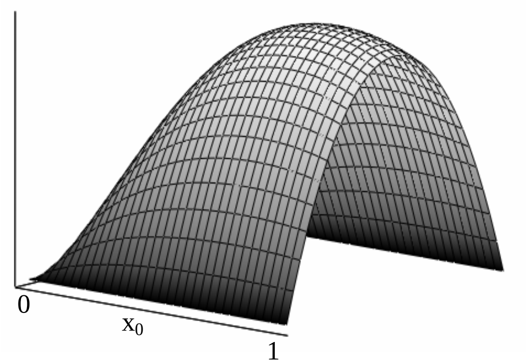
rjac - პარამეტრი, რომელიც მართავს რელაქსაციის პროცესს. ის ღებულობს მნიშვნელობებს 0-1 დიაპაზონიდან, მაგრამ ოპტიმალური მნიშვნელობა დამოკიდებულია ამოცანის დეტალებზე.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ამოცანები (3.8) и (3.9), სადაც $q(x, y) = x + y$, $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$, $c(x, y) = 1$, $d(x, y) = 1$, $x_0 = 1/2$.

(3.8) და (3.9) ამოცანების რიცხვითი ამონახსნები გრაფიკული სახით წარმოდგენილია ნახ. 1. და ნახ. 2. – ზე.



ნახ. 1.



ნახ. 2.

თავი I I I. ოპტიმალური მართვის ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმები

1. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა MathCad-ში

1.1. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნისას ხშირად გამოიყენება სპეციალიზებული პროგრამული პაკეტები, რომლებიც განკუთვნილია მათემატიკური გამოთვლებისათვის. ასეთ პროგრამულ პაკეტთა რიცხვს მიეკუთვნება Mathcad-იც.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას საძიებელი სიდიდე არის ფუნქცია. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას უცნობია ერთი ცვლადის ფუნქცია, ხოლო კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას უცნობია მრავალი ცვლადის ფუნქცია. Mathcad-ი შეიცავს რიგ შიგა ფუნქციებს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის საპოვნელად. ეს ფუნქციები განკუთვნილია დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნის პოვნისათვის. დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის სხვადასხვა ალგორითმებისთვის Mathcad-ს გააჩნია სხვადასხვა შიგა ფუნქციები. ყოველი ფუნქცია საჭიროებს, რომ მოცემული იყოს შედეგი სიდიდეები, რომლებიც აუცილებელია ამონახსნის პოვნისათვის:

- საწყისი პირობები.
- წერტილების სიმრავლე, სადაც საჭიროა ამონახსნის პოვნა.
- თვით დიფერენციალური განტოლება, ჩაწერილი რომელიმე სპეციალური ფორმით.

პირველ რიგის დიფერენციალური განტოლება - ეს განტოლებაა, რომელიც არ შეიცავს უცნობი ფუნქციის ერთზე მაღალი რიგის წარმოებულს. ასეთი განტოლების ამოსახსნელად გამოიყენება ფუნქცია rkfixed, რომელიც ამონახსნს ეძებს რუნგე-კუტეს მეოთხე რიგის მეთოდით. ამ ფუნქციის შედეგი არის მატრიცა, რომელიც შეიცავს შემდეგ ორ სვეტს:

• პირველი სვეტი შეიცავს წერტილებს, რომლებშიც იძებნება დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

• მეორე სვეტი შეიცავს შესაბამის წერტილებში ნაპოვნ მნიშვნელობებს.

ფუნქცია rkfixed (y, x1, x2, npoints, D) შეიცავს შემდეგ არგუმენტებს.

y - n განზომილების მქონე საწყისი პირობების ვექტორი, სადაც n - დიფერენციალური გატოლების რიგია ან სისტემაში განტოლებების რაოდენობის რიცხვია. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებისათვის საწყისი მნიშვნელობის ვექტორი მოიცემა ერთ წერტილში $y_0 = y(x1)$.

x1, x2 - ინტერვალის სასაზღვრო წერტილებია, რომელზედაც იძებნება დიფ. განტოლების ამონახსნი. y ვექტორში მოცემული საწყისი მნიშვნელობა ეს არის x1 წერტილში ამონახსნის მნიშვნელობა.

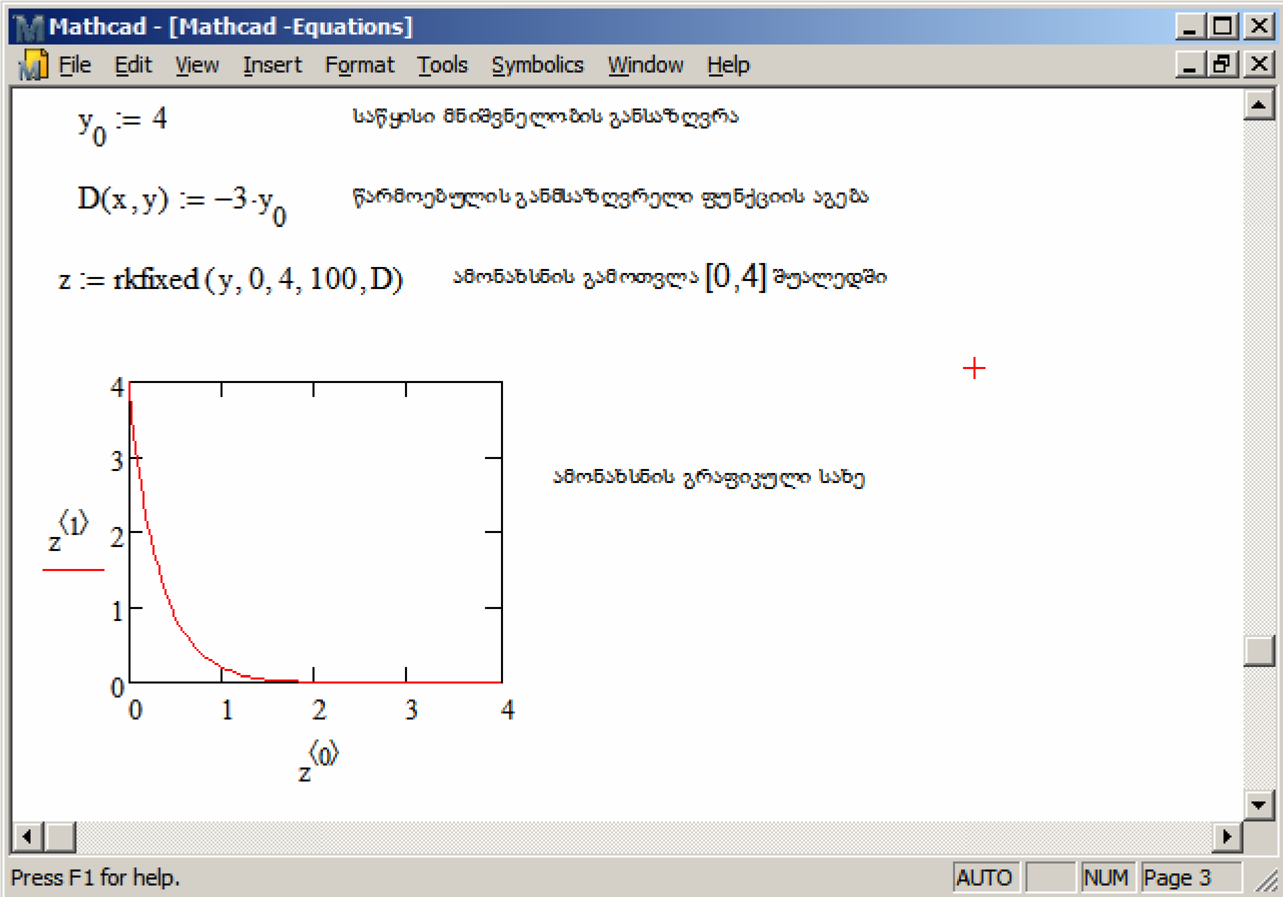
npoints - იმ წერტილების რიცხვი (საწყისი წერტილები არ ეთვლება), რომლებშიც იძებნება მიახლოებითი ამონახსნი. ამ არგუმენტის მეშვეობით განისაზღვრება იმ მატრიცის სტრიქონების რიცხვი (1+npoints), რომელსაც ღებულობს rkafixed ფუნქცია.

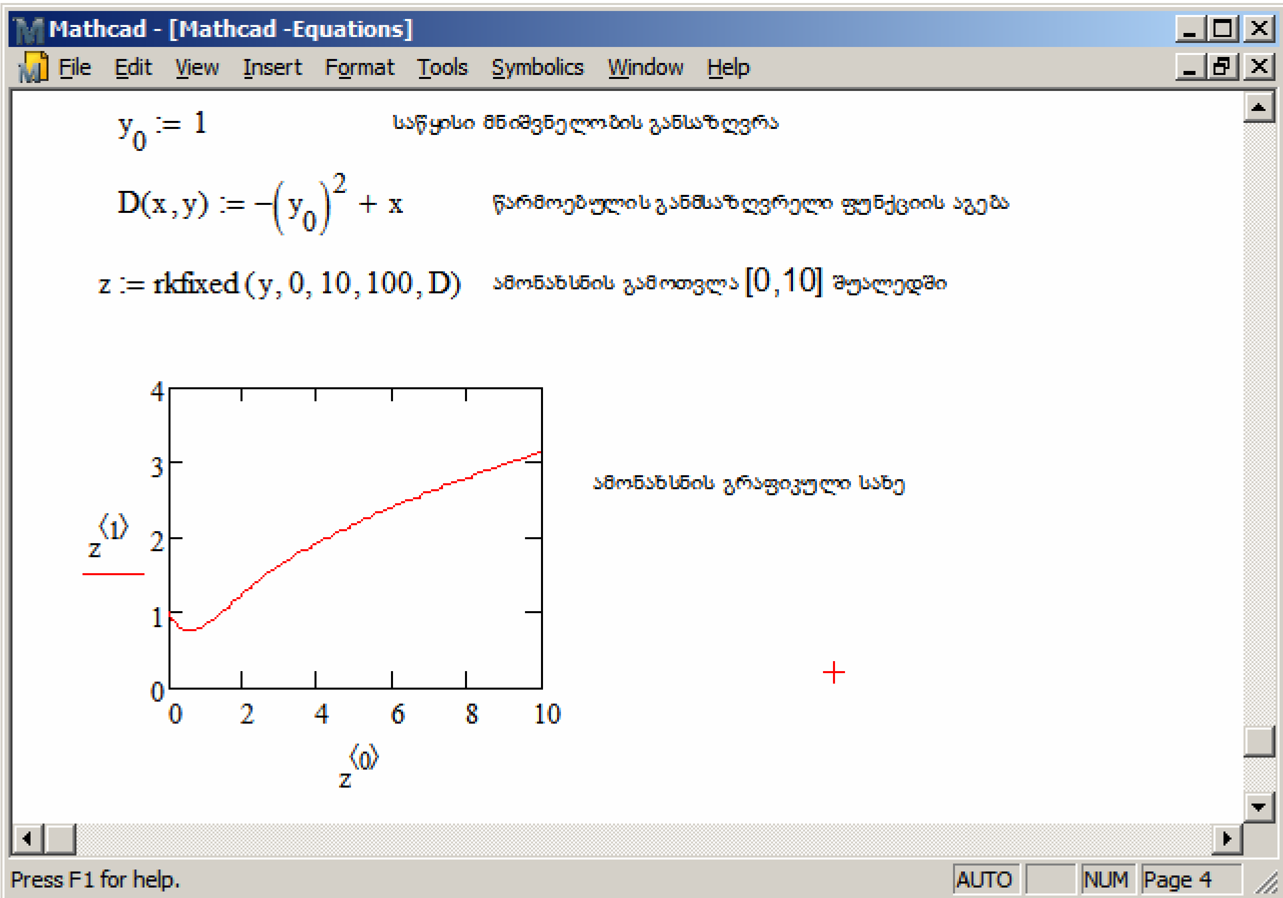
$D(x, y)$ – ფუნქცია, ღებულობს მნიშვნელობას n ელენემტიანი ვექტორის სახით, რომელიც შეიცავს უცნობი ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულებს.

საკმაოდ რთული ნაწილი დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნისას არის $D(x, y)$ - ფუნქციის განსაზღვრა, განსაკუთრებით არაწრფივი განტოლების ამოხსნისას. ამ დროს მოსახერხებელია სიმბოლური სახის გარდაქმნები განტოლებიდან $y'(x)$-ის გამოსაყოფად.

განვიხილოთ პირველ რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მაგალითები:

$$1)\ \begin{cases} y' + 3 \cdot y = 0 \\ y_0 = 4 \end{cases}, \qquad 2)\ \begin{cases} y' = -y^2 + x \\ y_0 = 1 \end{cases}$$


Mathcad - [Mathcad -Equations]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
$y_0 := 4$ საწყისი მნიშვნელობის განსაზღვრა
$D(x,y) := -3 \cdot y_0$ წარმოებულის განმსაზღვრელი ფუნქციის აგება
$z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 4, 100, D)$ ამონახსნის გამოთვლა [0,4] შუალედში
$z^{\langle 1 \rangle}$
$z^{\langle 0 \rangle}$
ამონახსნის გრაფიკული სახე
Press F1 for help.
AUTO NUM Page 3


Mathcad - [Mathcad -Equations]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
$y_0 := 1$ საწყისი მნიშვნელობის განსაზღვრა
$D(x,y) := -\left(y_0\right)^2 + x$ წარმოებულის განმსაზღვრელი ფუნქციის აგება
$z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 10, 100, D)$ ამონახსნის გამოთვლა [0,10] შუალედში
$z^{\langle 1 \rangle}$
$z^{\langle 0 \rangle}$
ამონახსნის გრაფიკული სახე
Press F1 for help.
AUTO NUM Page 4

1.2. მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ანალოგიურად შეიძლება ამოვხსნათ მაღლი რიგის დიფერენციალური განტოლებებიც. ჯერ განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა. პირველ რიგის დიფერენციალურ განტოლებასთან შედარებით ძირითადი განსხვავება მდგომარეობს შემდეგში:

• საწყისი მნიშვნელობის ვექტორი ახლა შედგება ორი ელემენტისაგან. ფუნქციის და მისი პირველი რიგის წარმოებულის მნიშვნელობები საწყის წერტილში.

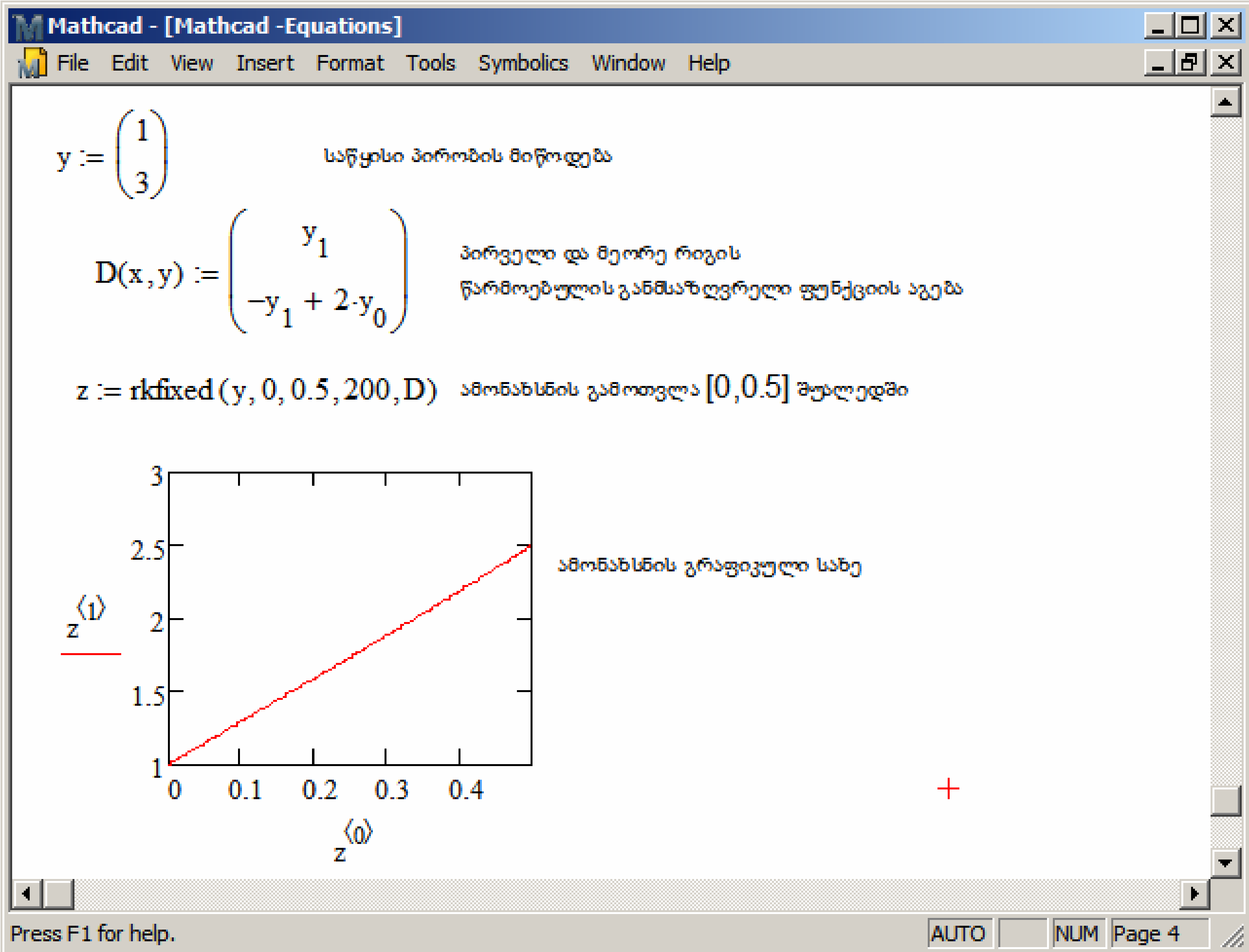
• $D(t, y)$ ფუნქცია ახლა წარმოადგენს ორ ელემენტიან ვექტორს:

$$D(t, y) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

• ამოხსნის შედეგად მიღებული მატრიცა ახლა შეიცავს სამ სვეტს: პირველი სვეტი შეიცავს t-ს მნიშვნელობებს, სადაც იძებნება ამონახსნი, მეორე სვეტი შეიცავს y(t)-ს მნიშვნელობებს, ხოლო მესამე - $y'(t)$ -ს მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მაგალითი:

$$\begin{cases} y'' = y' + 2 \cdot y \\ y_0 = 1, \quad y_1 = 3 \end{cases}$$



1.3. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

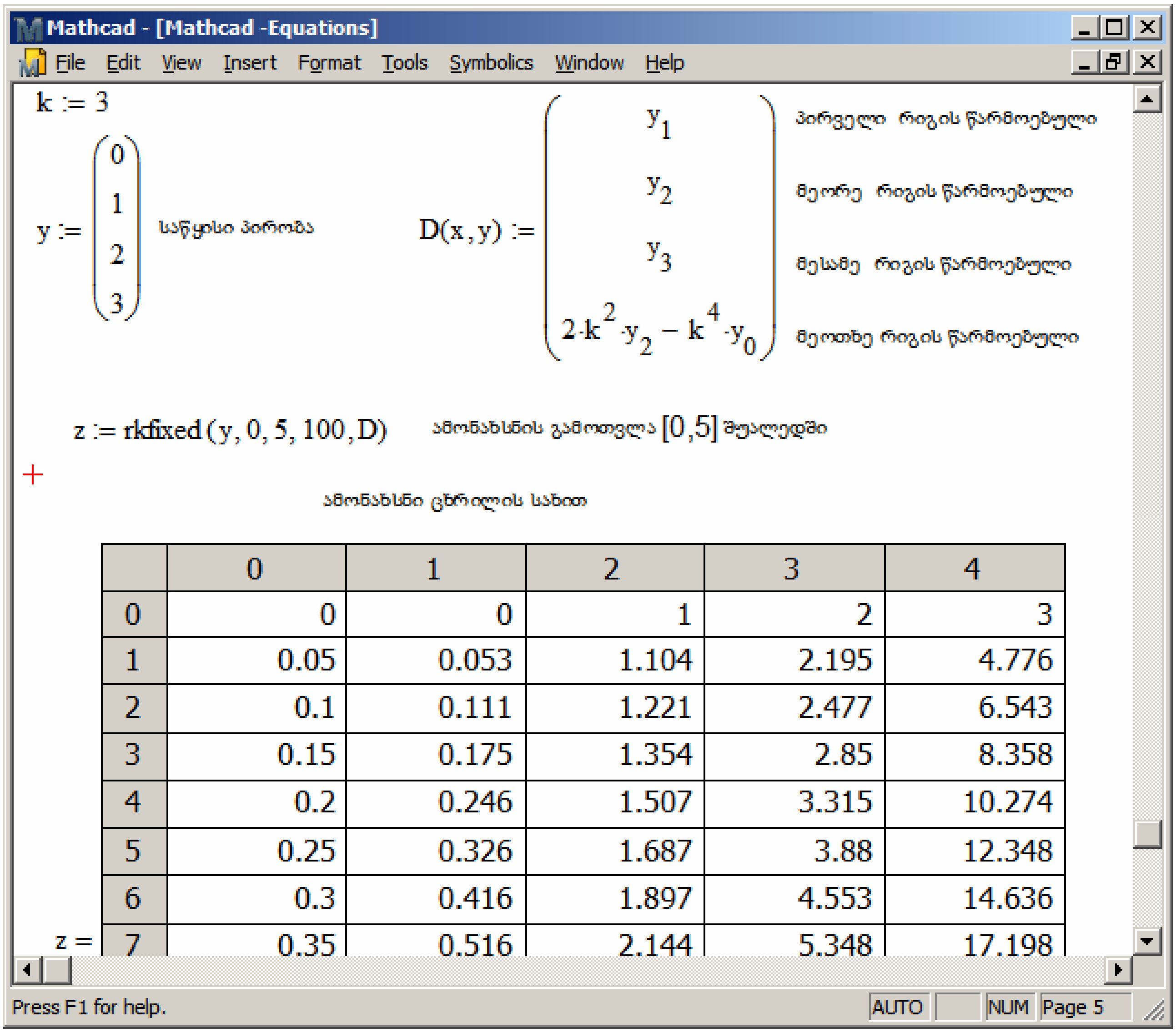
მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის მეთოდიკა თითქმის ანალოგიურია მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდიკასა. ძირითადი განსხვავება მდგომარეობს შემდეგში :

- საწყისი მნიშვნელობების y ვექტორი ახლა შედგება n ელემენტისაგან : ფუნქციისა და მისი წარმოებულების $y,\ y',\ y'' \ldots\ y^{(n-1)}$ მნიშვნელობები საწყის წერტილში.

- ფუნქცია D ახლა არის n ელემენტიანი ვექტორი: $D(t,y) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \ldots \\ y^{n}(t) \end{pmatrix}$

- ამოხსნის შედეგად მიღებული მატრიცა ახლა შეიცავს n სვეტს: პირველი სვეტი შეიცავს t-ს მნიშვნელობებს, სადაც იძებნება ამონახსნი, დანარჩენი სვეტები შეიცავს $y(t),\ y'(t),\ y''(t) \ldots\ y^{(n-1)}(t)$ -ს მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ მეოთხე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მაგალითი:



1.4. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაც ანალოგიურია მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისა. ფაქტიურად მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა შეიძლება განვიხილოთ როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კერძო შემთხვევა.

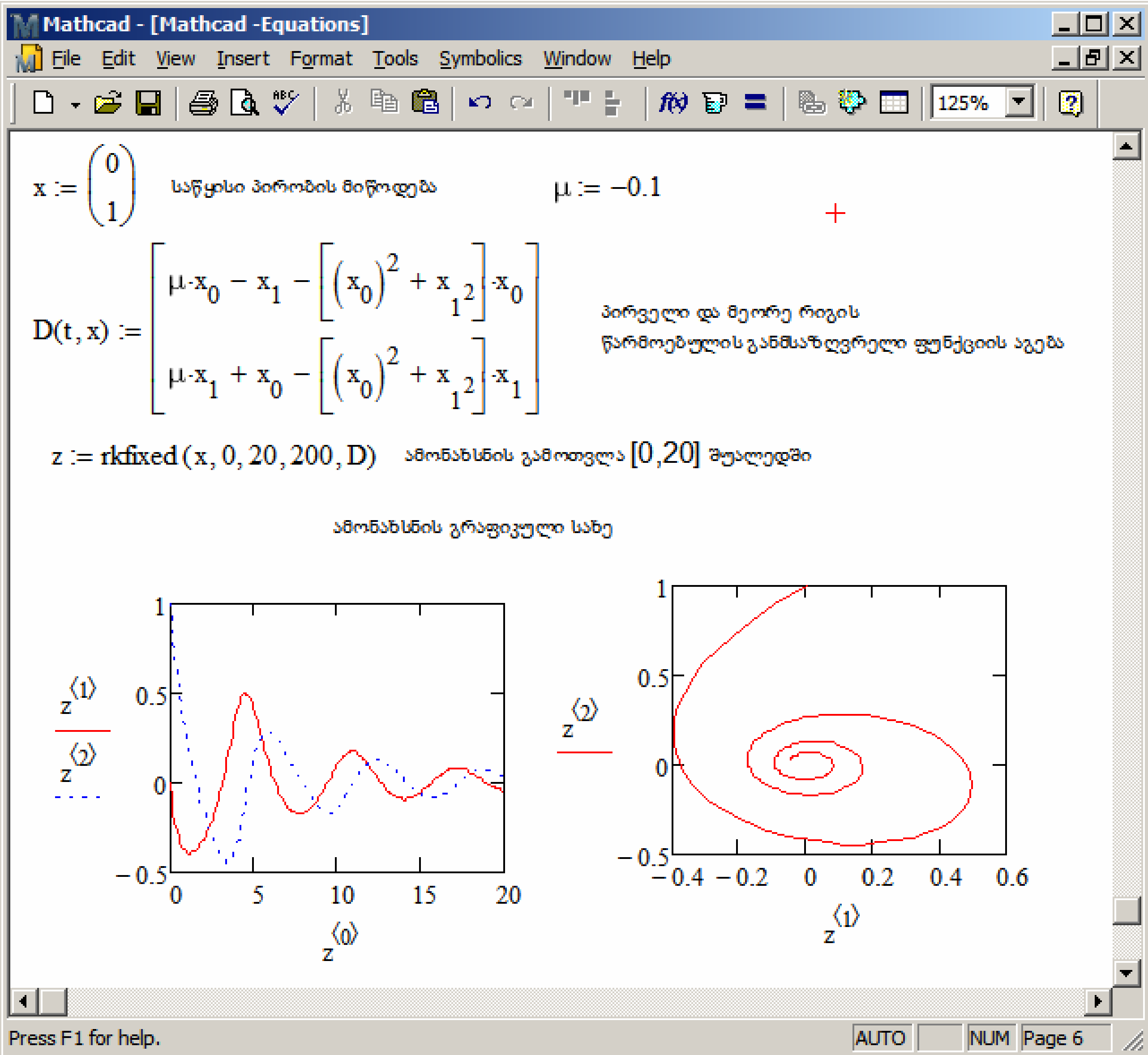
პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის საჭიროა:

1. განვსაზღვროთ ვექტორი, რომელიც შეიცავს საწყის მნიშვნელობებს თითოეული ფუნქციისათვის.

2. განვსაზღვროთ ფუნქცია, რომელიც შეიცავს პირველი რიგის წარმოებულის მნიშვნელობებს თითოეული ფუნქციისათვის და რომელიც ღებულობს შედეგს n ელემენტიანი ვექტორის სახით.

3. ავირჩიოთ წერტილები, რომლებშიც უნდა მოვძებნოთ მიახლოებული ამონახსნი.

4. გადავცეთ ყველა ეს ინფორმაცია rkfixed ფუნქციას.



ამ შემთხვევაში rkfixed ფუნქცია ღებულობს მატრიცას, რომლის პირველი სვეტის შეიცავს წერტილებს, სადაც იძებნება მიახლოებითი მნიშვნელობა, ხოლო დანარჩენი სვეტები შეიცავს შესაბამის წერტილებში ნაპოვნ მნიშვნელობებს თითოეული ფუნქციისათვის.

მაღალი რიგის განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის საჭიროა იგი დავიყვანოთ პირველი რიგის განტოლებათა სისტემაზე შემდეგნაირად:

$$x^{(n)} = f(t, x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \ldots, x, \ldots)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\begin{aligned} &x_1(t) = x(t) \\ &x_2(t) = x'(t) \\ &\ldots \\ &x_n(t) = x^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

მივიღებთ პირველი რიგის განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} &x_1'(t)=x_2(t) \\ &x_2'(t)=x_3(t) \\ &x_n'(t)=f(t, x_n, x_{n-1}, \ldots\ x_1, ...) \end{aligned}$$

ასეთი სისტემის ამოხსნა უკვე განხილული გვაქვს.

2. ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ იტერაციული მეთოდებით ელიფსური განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები Mathcad–ის გამოყენებით.

ფიზიკური პროცესების ანალიზისას ხშირად გვხვდება შემდეგი ორი კერძომწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება - პუასონის განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

და მისი ერთგვაროვანი ფორმა - ლაპლასის განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

კვადრატულ არეზე ასეთი ტიპი განტოლებების ამოსახსნელად Mathcad-ს აქვს ორი ფუნქცია. თუ ცნობილია $u(x, y)$ უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობები კვადრატის ოთხივე მხარეზე, მაშინ გამოიყენება relax ფუნქცია. თუ $u(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობები კვადრატის ოთხივე მხარეს ნულის ტოლია, მაშინ გამოიყენება

multigrid ფუნქცია. ეს ფუნქცია შედარებით უფრო სწრაფად ხსნის ამოცანას, ვიდრე relax ფუნქცია.

2.1. relax ფუნქცია

ფაქტიურად, **relax** ფუნქციის გამოყენებით შეიძლება ამოვხსნათ უფრო ზოგადი სახის ელიფსური ტიპის განტოლებები

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=F(x,y),\qquad D=AC-B^2>0. \tag{1.1}$$

კერძოწარმოებლებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ერთერთ მეთოდს წარმოადგენს ბადური მეთოდი. ამ მეთოდის იდეა მდგომარეობს შემდეგში: დავყოთ ერთეულოვანი კვადრატული არე ერთნაირი ზომის ბადით. ბადის ბიჯი x ღერძის და y ღერძის მიმართ, ზოგადად, შეიძლება იყოს სხვადასხვა. განმარტების თანახმად კერძო წარმოებული ტოლია

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x)}{\Delta x}\approx\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x)}{\Delta x}.$$

თუ განვიხილავთ ფუნქციას მხოლოდ ბადის წერტილებში, მაშინ კერძო წარმოებული შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\approx\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h},$$

სადაც (i,j) კვანძი შეესაბამება (x,y) წერტილს. მიღებულ გამოსახულებას ეწოდება მარჯვენა სასრული სხვაობა. სახელწოდება დაკავშირებულია მასთან, რომ ბადის წერტილში წარმოებულის გამოთვლისას გამოიყენება ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში და ამ წერტილის მარჯვნივ მდებარე წერტილში. ცხადია, რომ მსგავსი გამოსახულება შეიძლება მივვიღოთ, თუ ბადის წერტილში წარმოებულის გამოთვლისას გამოვიყენებდით ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერტილში და ამ წერტილის მარცხნივ მდებარე წერტილში.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\approx\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}$$

ასეთ გამოსახულებას ეწოდება მარცხენა სასრული სხვაობა. შეიძლება მივიღოთ ცენტრალური სასრული სხვაობაც, ამ გამოსახულებების საშუალოს გამოთვლით.

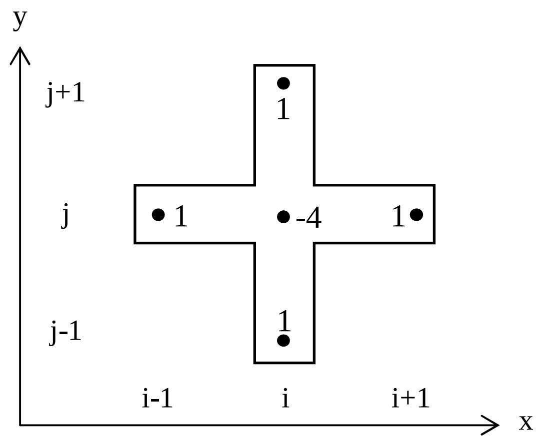
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

ახლა განვიხილოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებული, იგი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

ამ შემთხვევაში წარმოებულის საპოვნელად გამოვიყენეთ სიმეტრიული წერტილები. თუმცა, ცხადია, შესაძლებელი იყო გამოგვეყენებინა არასიმეტრიული განლაგების წერტილებიც.

ბადური მეთოდის ძირითადი იდეის თანახმად, (1.1) განტოლებაში ორივე სივრცითი წარმოებულის დისკრეტიზაციისთვის, შესაძლებელია (1.1) განტოლება დავიყვანოთ სასრულ სხვაობიან განტოლებაზე „ჯვარი“–ს ტიპის შაბლონის გამოყენებით



$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j}\,.$$

მაგალითად, პუასონის განტოლებისათვის კოეფიციენტები მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობებს $a_{i,j} = b_{i,j} = c_{i,j} = d_{i,j} = 1,\ e_{i,j} = -4$.

რელაქსაციის მეთოდის იდეა მდგომარეობს შემდეგში: თუ არ გვაქვს წყარო (ლაპლასის განტოლება), მაშინ მოცემულ კვანძში ფუნქციის მნიშვნელობა მიმდინარე $k+1$ ბიჯზე განისაზღვრება როგორც ახლომდებარე კვანძებში ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა k ბიჯზე.

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{k} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k} + u_{i,j+1}^{k})$$

წყაროს არსებობის შემთხვევაში (პუასონის განტოლება), სხვაობიან სქემას ექნება სახე

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{k} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k} + u_{i,j+1}^{k}) - \frac{h^2}{4} f_{i,j}.$$

რელაქსაციის მეთოდი ფაქტიურად იყენებს სხვაობიან სქემას ორგანზომილებიანი შემთხვევისათვის მაქსიმალურად შესაძლებელი $\tau = \frac{h^2}{4}$ ბიჯით.

რელაქსაციის მეთოდში აუცილებელია მივაწოდოთ როგორც საწყისი მიახლოება, ანუ ბადის ყოველ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა, ასევე სასაზღვრო პირობა.

რელაქსაციის ალგორითმის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ იტერაციის მსვლელობისას ხდება განტოლების და საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობის კორექციის შემოწმება ყოველ წერტილში. თუ საწყისი მიახლოება არჩეულია სწორად, მაშინ ალგორითმი მივა სწორ ამონახსნამდე.

relax ფუნქცია შედეგში ღებულობს კვადრატულ მატრიცას, რომელშიც მატრიცის ელემენტების განლაგება შეესაბამება კვადრატში წერტილების განლაგებას, ხოლო მნიშვნელობა – ამ წერტილში მიახლოებით ამონახსნს. ეს ფუნქცია იყენებს რელაქსაციის მეთოდს მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად.

relax ფუნქციის გამოყენებისას, აუცილებელია ვიცოდეთ საძიებელი $u(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობები კვადრატული არის ოთხივე მხარეს.

relax (a, b, c, d, e, f, u, rjac) ფუნქციას აქვს შემდეგი არგუმენტები:

a, b, c, d, e - ერთნაირი ზომის კვადრატული მატრიცები, როლებიც შეიცავენ (1.1) განტოლების კოეფიციენტებს.

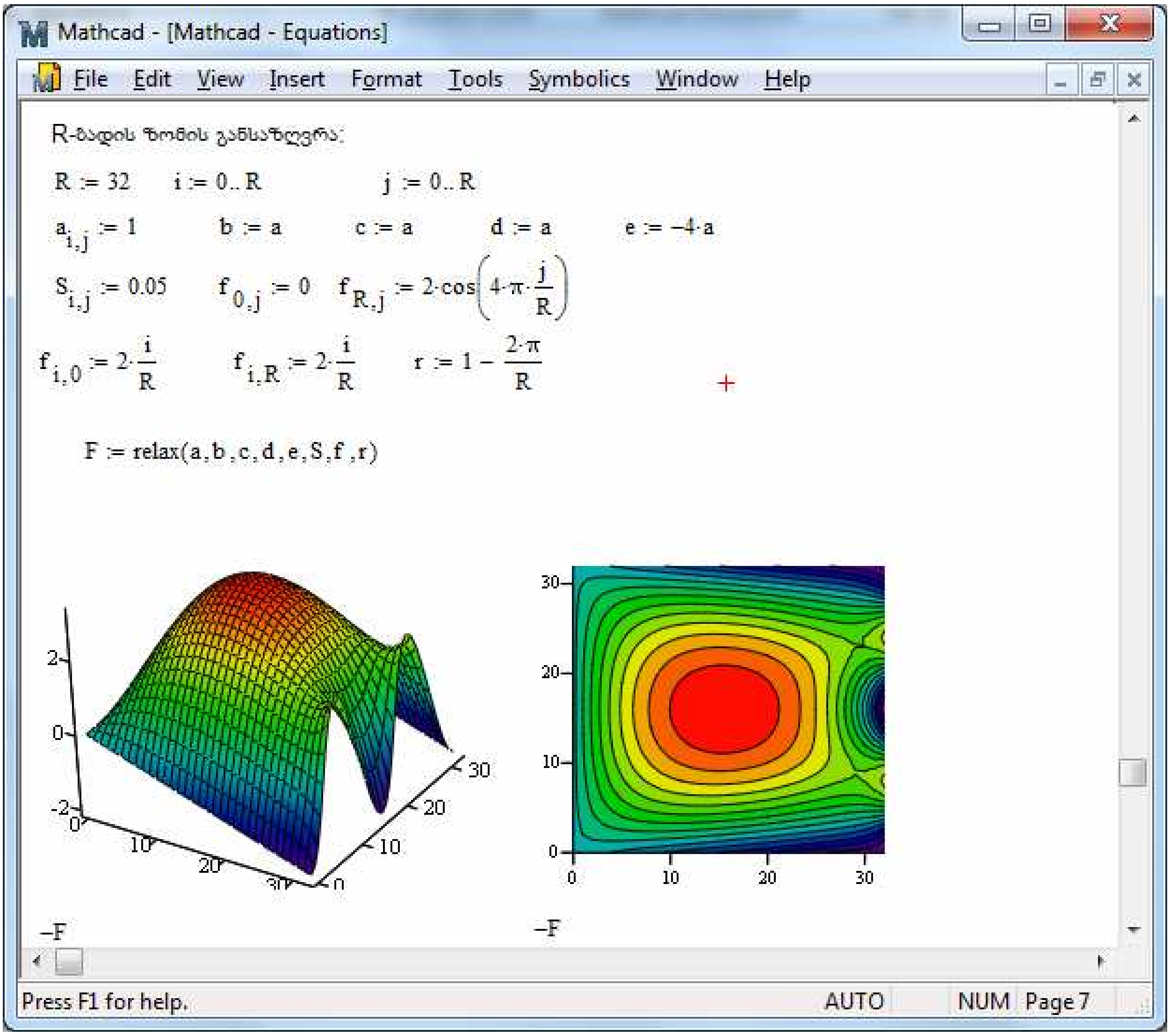
f - კვადრატული მატრიცა, რომელიც შეიცავს განტოლების მარჯვენა მხარის მნიშვნელობებს კვადრატული შესაბამის კვანძებში, სადაც იძებნება ამონახსნი.

u - კვადრატული მატრიცა, რომელიც შეიცავს ამონახსნის სასაზღვრო მნიშვნელობებს კვადრატული არის საზღვარზე და ამონახსნის საწყის მიახლოებით მნიშვნელობას კვადრატული არის შიგა კვანძებში.

rjac - რიცხვითი ალგორითმის პარამეტრი (იაკობის იტერაციული სქემის სპექტრალური რადიუსი). ეს არის რიცხვი 0-სა და 1-ს შორის, რომელიც მართავს

რელაქსაციის მეთოდის კრებადობას. ოპტიმალური მნიშვნელობა დამოკიდებულია ამოცანის დეტალებზე.

ყველა მატრიცა (a, b, c, d, e – სხვაობიანი სქემის კოეფიციენტები, u – სასაზღვრო პირობები, f – განტოლების მარჯვენა მხარის მნიშვნელობები) უნდა იყოს ერთნაირი $(M+1)\times(M+1)$ ზომის, კვადრატული არის შესაბამისად.



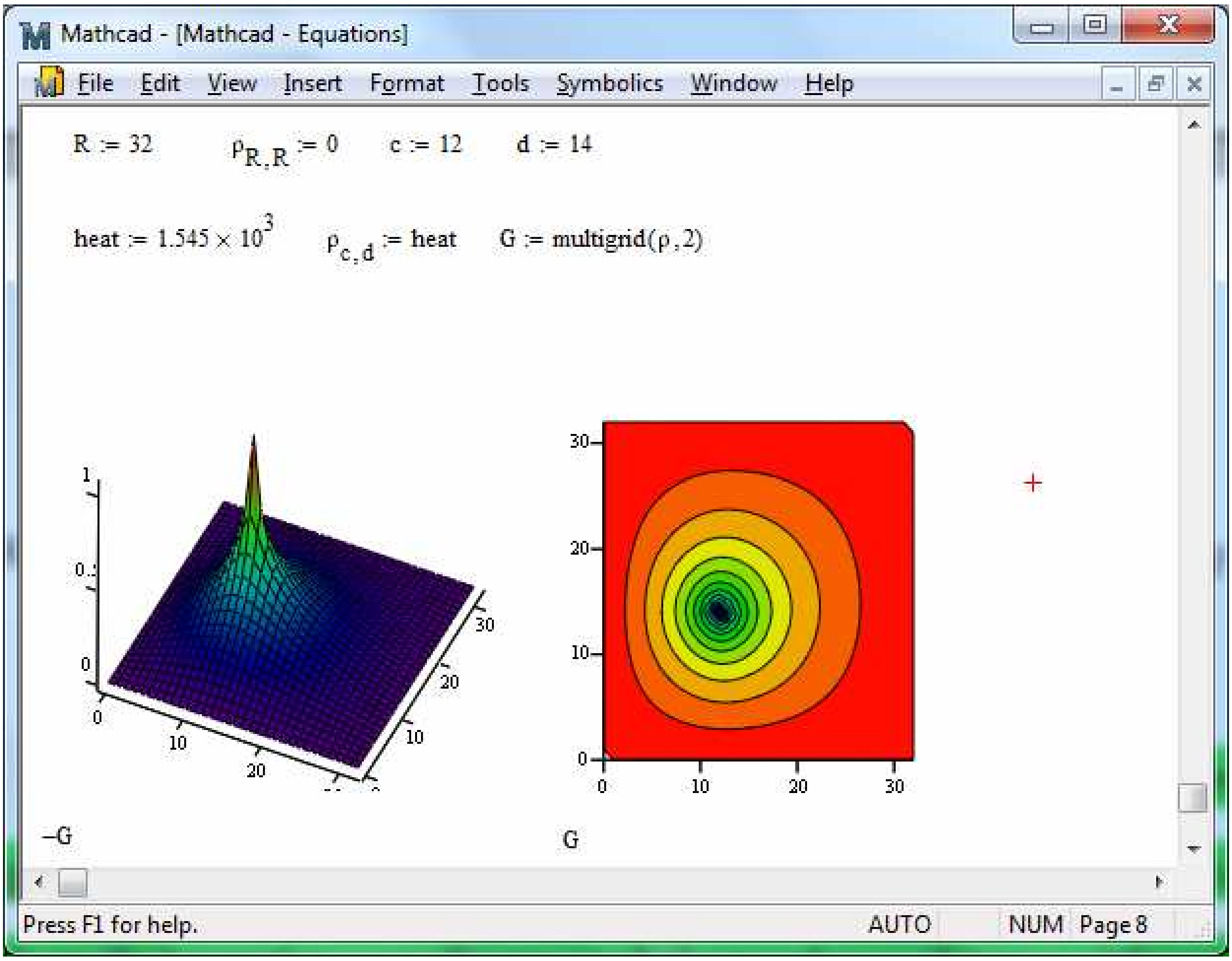
ნახ. 1. relax ფუნქციის გამოყენება

როგორც აღვნიშნეთ, თუ სასაზღვრო მნიშვნელობები ნულია კვადრატის ოთხივე მხარეს, მაშინ უკეთესია multigrid ფუნქციის გამოყენება. multigrid(M, ncycle) ფუნქციას აქვს შემდეგი არგუმენტები:

M - 2^n+1 ზომის კვადრატული მატრიცაა, რომელიც შეიცავს განტოლების მარჯვენა მხარის - f -ის მნიშვნელობებს კვადრატული არის შესაბამის წერტილებში.

ncycle - multigrid ფუნქციის იტერაციის ყოველ დონეზე ციკლების რიცხვი. ჩვეულებრივად მნიშვნელობა 2 მოგვცემს ამონახსნის საკმაოდ კარგ აპროქსიმაციას.

ქვემოთ მოცემულია multigrid ფუნქციის გამოყენების მაგალითი:



ნახ. 2. multigrid ფუნქციის გამოყენება

2.2. რელაქსაციის მეთოდები სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისათვის

განვიხილოთ იტერაციული მეთოდებით ელიფსური განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ალგორითმი Mathcad–ის გამოყენებით.

დავუშვათ, გვინდა ამოვხსნათ შემდეგი ელიფსური განტოლება:

$$Lu = f \tag{1.2}$$

აქ L – ელიფსური ოპერატორია, ხოლო f – განტოლების მარჯვენა მხარე.

ამ ამოცანის ამოხსნისათვის აუცილებელია სასაზღვრო პირობების ცოდნა. ჩვენ განვიხილავთ დირიხლეს სასაზღვრო პირობას (მოცემულია საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობები საზღვარზე). სიმარტივისათვის განვიხილოთ პუასონის განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f \tag{1.3}$$

დავუშვათ ამონახსნი იძებნება ერთეულოვან კვადრატზე. (1.3) ამოცანის სასრულ–სხვაობიანი აპროქსიმაციის აგებისათვის შემოვიღოთ სიბრტყეზე $(N+1)x(N+1)$ კვანძისაგან შედგენილი ბადე, რომელიც ფარავს განხილულ კვადრატულ არეს. (სიმარტივისათვის კოორდინატთა ორივე ღერძისათვის ავირჩიოთ ერთნაირი და თანაბარი ბადის ბიჯი $-h$). ბადის კვანძები აღვნიშნოთ ინდექსების (i, j) წყვილით, რომლებიც გაირბენენ მნიშვნელობებს $0-$დან $N-$მდე. ამ აღნიშვნებით (i, j) წერტილის კოორდინატები ტოლია $(x_i = ih,\ \ y_j = jh)$. საკვანძო წერტილებში $u,\ f$ ფუნქციების მნიშვნელობები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $f_{ij} = f(x_i, y_j)$. თუ მეორე რიგის წარმოებულის აპროქსიმაციისათვის გამოვიყენებთ სამწერტილოვან ფორმულას

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\approx\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2},$$

მაშინ მივიღებთ (1.3) განტოლების სხვაობიან აპროქსიმაციას

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}=f_{i,j} \tag{1.4}$$

აქედან შეიძლება მივიღოთ შემდეგი სხვაობიანი სქემა

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k}+u_{i,j+1}^{k}+u_{i,j-1}^{k})-\frac{h^2}{4}f_{i,j} \tag{1.5}$$

ეს არის კლასიკური სხვაობიანი სქემა, რომელსაც ეწოდება იაკობის მეთოდი. ეს მეთოდი პრაქტიკაში იშვიათად გამოიყენება ნელი კრებადობის გამო, მაგრამ ის წარმოადგენს მრავალი თანამედროვე მეთოდის საფუძველს. ამ მეთოდის უფრო გაუმჯობესებულ კლასიკურ მეთოდს წარმოადგენს გაუს–ზეიდელის მეთოდი. ამ მეთოდში უცნობი ფუნქციის ორი მნიშვნელობა (1.5) ფორმულის მარჯვენა მხარეში აიღება იტერაციის $n+1$ ბიჯზე, როგორც კი ისინი გახდებიან ცნობილი.

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k+1}+u_{i,j+1}^{k}+u_{i,j-1}^{k+1})-\frac{h^2}{4}f_{i,j} \tag{1.6}$$

ეს მეთოდიც ასევე ნელა იკრიბება, მაგრამ ამ მეთოდის ანალიზის საფუძველზე მიიღება სხვა უფრო გაუმჯობესებული მეთოდები.

განვიხილოთ იაკობის და გაუს–ზეიდელის მეთოდები მატრიცული ფორმით. შევცვალოთ u–ს აღნიშვნა x–ით, რომ მივიღოთ მატრიცული განტოლების სტანდარტული სახე.

$$A \cdot x = b \tag{1.7}$$

ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ A მატრიცა შემდეგი სახით

$$A = L + D + U \tag{1.8}$$

აქ $D-$ A მატრიცის დიაგონალური ნაწილია, $L-$ A მატრიცის ქვედა სამკუთხა მატრიცაა, $U-$ A მატრიცის ზედა სამკუთხა მატრიცაა. L და U მატრიცები შეიცავენ ნულებს დიაგონალზე. იაკობის მეთოდის გამოყენებით r ბიჯზე იტერაცია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$D \cdot x^{(r)} = -(L + U) \cdot x^{(r-1)} + b \tag{1.9}$$

$-D^{-1} \cdot (L + U)$ მატრიცა არის იტერაციული მატრიცა, რომლის დახმარებით ხდება შემდეგი იტერაციული მიახლოების პოვნა. ამ მეთოდისათვის იტერაციათა რიცხვის, რომელიც საჭიროა 10^{-p} სიზუსტის მისაღწევად, შეფასებას აქვს შემდეგი სახე

$$r \approx \frac{p \ln 10}{-\ln p_s}. \tag{1.10}$$

ბადის განზომილების ზრდასთან ერთად p_s სპექტრალური რადიუსი მიისწრაფვის ნულისაკენ. მოცემული კონკრეტული განტოლების, სასაზღვრო პირობების და ბადის გეომეტრიის გათვალისწინებით სპექტრალური რადიუსი შეიძლება გამოვთვალოთ ანალიზურად. $(N+1)x(N+1)$ განზომილებიანი ბადისათვის, რომლის საზღვრებზე მოცემულია დირიხლეს პირობები, ასიმპტოტურ ფორმულას დიდი N–სათვის აქვს სახე:

$$p_s \approx 1 - \frac{\pi^2}{2(N+1)^2} \tag{1.11}$$

აქედან გამომდინარე იტერაციათა აუცილებელი რაოდენობა შეიძლება შევაფასოთ შემდეგი ფორმულით:

$$r \approx \frac{2p(N+1)^2 \ln 10}{\pi^2} \approx \frac{1}{2} p(N+1)^2 \tag{1.12}$$

სხვა სიტყვებით, იტერაციათა რაოდენობა პროპორციულია ბადის კვანძების რაოდენობის.

გაუს–ზეიდელის მეთოდს შეესაბამება შემდეგი მატრიცული განტოლება:

$$(L+D)\cdot x^{(r)} = -U\cdot x^{(r-1)} + b \tag{1.13}$$

ჩვენს მიერ განხილული მოდელის მიხედვით სპექტრალური რადიუსი და იტერაციათა რაოდენობა შეიძლება შევაფასოთ ფორმულებით:

$$p_s \approx 1 - \frac{\pi^2}{(N+1)^2} \tag{1.14}$$

$$r \approx \frac{p(N+1)^2 \ln 10}{\pi^2} \approx \frac{1}{4} p(N+1)^2 \tag{1.15}$$

თუ გაუს–ზეიდელის იტერაციის r ბიჯზე დავაკორექტირებთ $x^{(r)}$ სიდიდეს, მივიღებთ უკეთეს ალგორითმს. გაუს–ზეიდელის მეთოდიდან გამომდინარეობს:

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} - (L+D)^{-1}\cdot\left[(L+D+U)\cdot x^{(r-1)} - b\right]. \tag{1.16}$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული წევრი არის შეუსაბამობის ვექტორი $\xi^{(r-1)}$, ამის გათვალისწინებით გვექნება:

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} - (L+D)^{-1}\cdot \xi^{(r-1)} \tag{1.17}$$

კრებადობის გაუმჯობესებისათვის შემოვიტანოთ ეგრეთწოდებული „ზედა რელაქსაციის“ ω პარამეტრი:

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} - \omega(L+D)^{-1}\cdot \xi^{(r-1)} \tag{1.18}$$

მეთოდს, რომელიც იყენებს ამ სქემას, ეწოდება SOR (successive over relaqsation) მეთოდი. მტკიცდება შემდეგი თეორემები: ეს მეთოდი კრებადია მხოლოდ $0<\omega<2$–სათვის; როცა $0<\omega<1$, მაშინ ლაპარაკობენ არასაკმარისად სწრაფი რელაქსაციის შესახებ. განსაზღვრული მათემატიკური შეზღუდვებისას, რომლებსაც აკმაყოფილებს სასრულ სხვაობიანი მეთოდებისას მიღებული მატრიცები, მხოლოდ $1<\omega<2$–სათვის ეს მეთოდი იკრიბება გაუს–ზეიდელის მეთოდზე სწრაფად.

თუ p_{Jacobi} არის იაკობის იტერაციული სქემის სპექტრალური რადიუსი, მაშინ p^2_{Jacobi} იქნება გაუს–ზეიდელის იტერაციული სქემის სპექტრალური რადიუსი და ω–ს ოპტიმალურ მნიშვნელობას ექნება სახე:

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-p^2_{Jacobi}}} \tag{1.19}$$

აქედან გამომდინარე სპექტრალური რადიუსი ტოლია

$$p_{SOR} = \left(\frac{p_{Jacobi}}{1 + \sqrt{1 - p_{Jacobi}^2}} \right)^2 \qquad (1.20)$$

თუ გამოვიყენებთ იაკობის სპექტრალური რადიუსის გამოსახულებას, მაშინ მივიღებთ: 10^{-p} სიზუსტის მისაღწევად აუცილებელია შემდეგი რაოდენობის იტერაცია:

$$r \cong \frac{p(N+1)\ln 10}{2\pi} \cong \frac{1}{3} p(N+1) \qquad (1.21)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ SOR მეთოდი 10^{-p} სიზუსტის მისაღწევად საჭირო იტერაციების რიცხვი პროპორციულია $(N+1)$–ის, და არა $(N+1)^2$–ის. ამ რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელია წარმატებით ამოვხსნათ სასაზღვრო ამოცანები კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის.

განვიხილოთ მეორე რიგის ელიფსური განტოლება ორი x და y ცვლადისათვის და შევადგინოთ სხვაობიანი სქემა კვადრატული არისათვის. $A \cdot x = b$ მატრიცულ განტოლებაში A მატრიცის ყოველ სტრიქონს შეესბამება გამოსახულება

$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j} \qquad (1.22)$$

ჩვენს მიერ განხილულ ამოცანაში $a = b = c = d = 1$, $e = -4$.

იტერაციული ფორმულა შეიძლება დავწეროთ შემდეგნაირად

$$u_{i,j}^{*} = \frac{1}{e_{i,j}}(f_{i,j} - a_{i,j}u_{i+1,j} - b_{i,j}u_{i-1,j} - c_{i,j}u_{i,j+1} - d_{i,j}u_{i,j-1}). \qquad (1.23)$$

საშუალოდშეწონილ მნიშვნელობას ექნება სახე

$$u_{i,j}^{new} = \omega u_{i,j}^{*} + (1-\omega)u_{i,j}^{old} \qquad (1.24)$$

ამ ამოცანისათვის შეუსაბამობა შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$\xi_{i,j} = a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} - f_{i,j} \qquad (1.25)$$

SOR მეთოდის ფორმულის გამოყნებით, შეიძლება დავწეროთ

$$u_{i,j}^{new} = u_{i,j}^{old} - \omega \frac{\xi_{i,j}}{e_{i,j}} \qquad (1.26)$$

ამ ფორმულის გამოყენებით შესაძლებელია ამოვხსნათ სასაზღვრო ამოცანები კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის Mathcad-ში, შეუსაბამობის ნორმა შეიძლება გამოვიყენოთ იტერაციული პროცესის დასრულების

კრიტერიუმად. SOR მეთოდის კრებადობის ასიმპტოტური შეფასება შეიძლება გამოვიყენოთ იტერაციების რაოდენობის შეფასებისათვის.

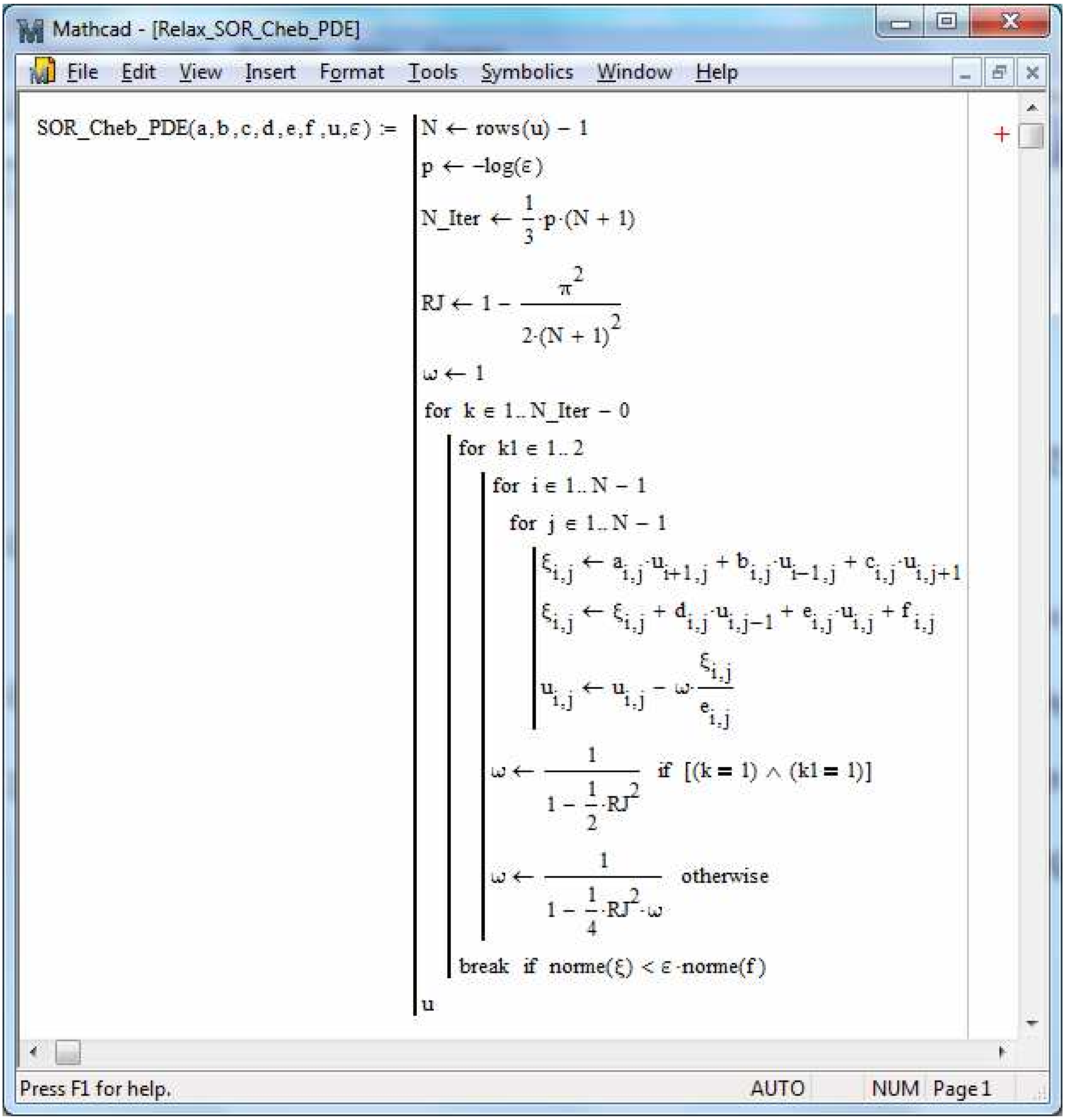
განვიხილოთ SOR მეთოდი ჩებიშევის აჩქარებით, სადაც გამოიყენება რელაქსაციის კოეფიციენტების დინამიური გამოთვლა

$$\begin{aligned}
&\omega^{(0)} = 1\\
&\omega^{(1/2)} = \frac{1}{1 - p_{Jacobi}^{2}/2}\\
&\omega^{(n+1/2)} = \frac{1}{1 - p_{Jacobi}^{2}\omega^{(n)}/4}\\
&n = 1/2, 1, \ldots, \infty\\
&\omega^{(\infty)} \to \omega_{optimal}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

SOR მეთოდის ამ რეალიზაციის მთავარ ღირებულებას წარმოადგენს ცდომილების ნორმის შემცირება ყოველ იტერაციაზე.

განვიხილოთ Mathcad–ის გამოყენებით მიღებული მეთოდების რეალიზაციის მაგალითები. ამოვხსნათ სასაზღვრო ამოცანა კვადრატულ არეზე ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის რელაქსაციის მეთოდის გამოყენებით.

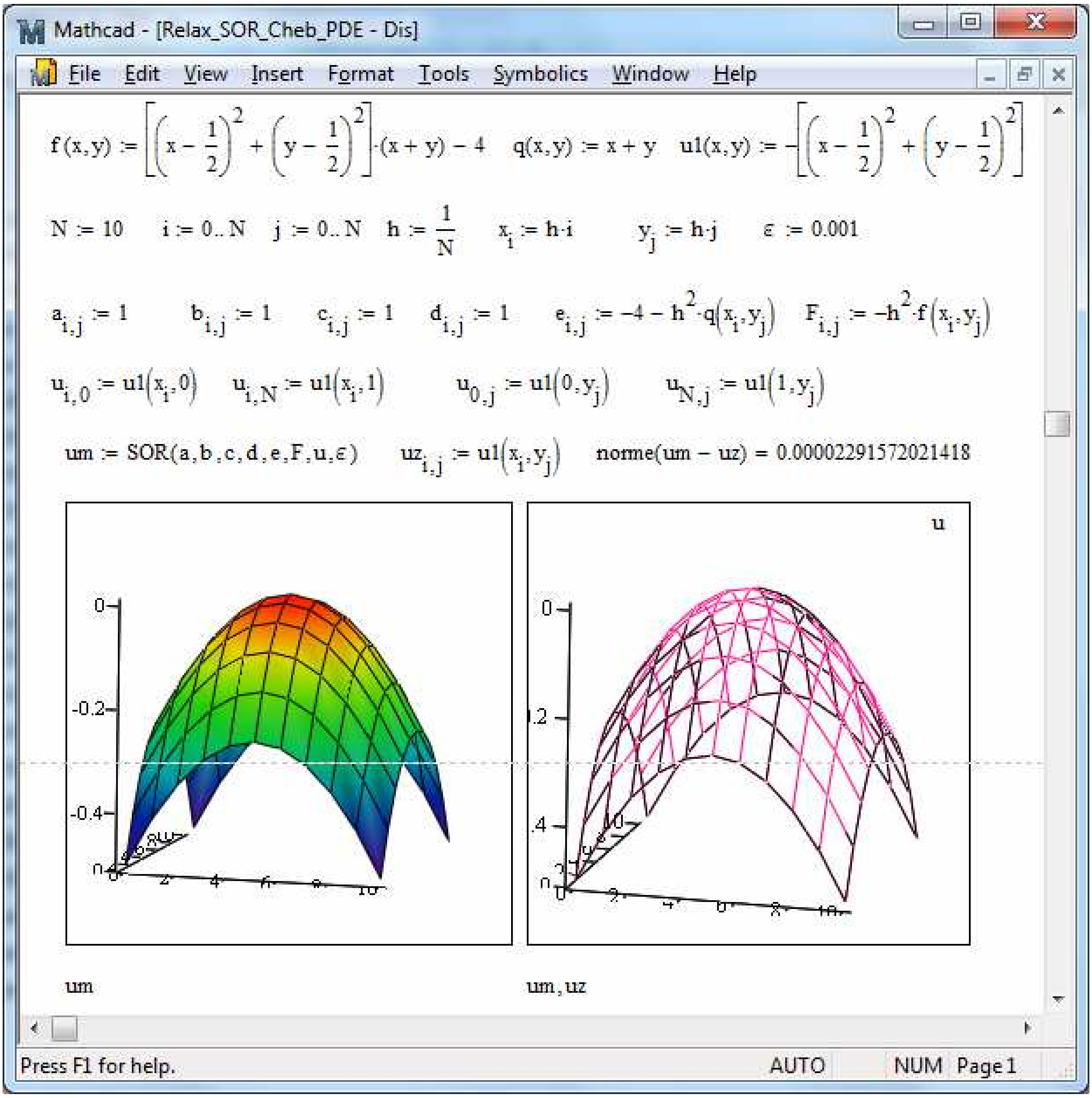
ნახ.3.–ზე მოცემულია Mathcad–ის ფრაგმენტი, სადაც შექმნილია $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქცია, რომელიც უზრუნველყოფს (1.26) ფურმულის რეალიზაციას (1.27)–ის გამოყენებით. ამ ფუნქციაში: a, b, c, d, e - ერთნაირი ზომის კვადრატული მატრიცებია, რომლებიც შეიცავენ განტოლების კოეფიციენტებს; f - კვადრატული მატრიცაა, რომელიც შეიცავს განტოლების მარჯვენა მხარის მნიშვნელობებს კვადრატული არის შესაბამის კვანძებში, სადაც იძებნება ამონახსნი; u - კვადრატული მატრიცაა, რომელიც შეიცავს ამონახსნის სასაზღვრო მნიშვნელობებს კვადრატული არის საზღვარზე და ამონახსნის საწყის მიახლოებით მნიშვნელობას კვადრატული არის შიგა კვანძებში; ε– ამონახსნის სიზუსტეა.



ნახ. 3. $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქცია

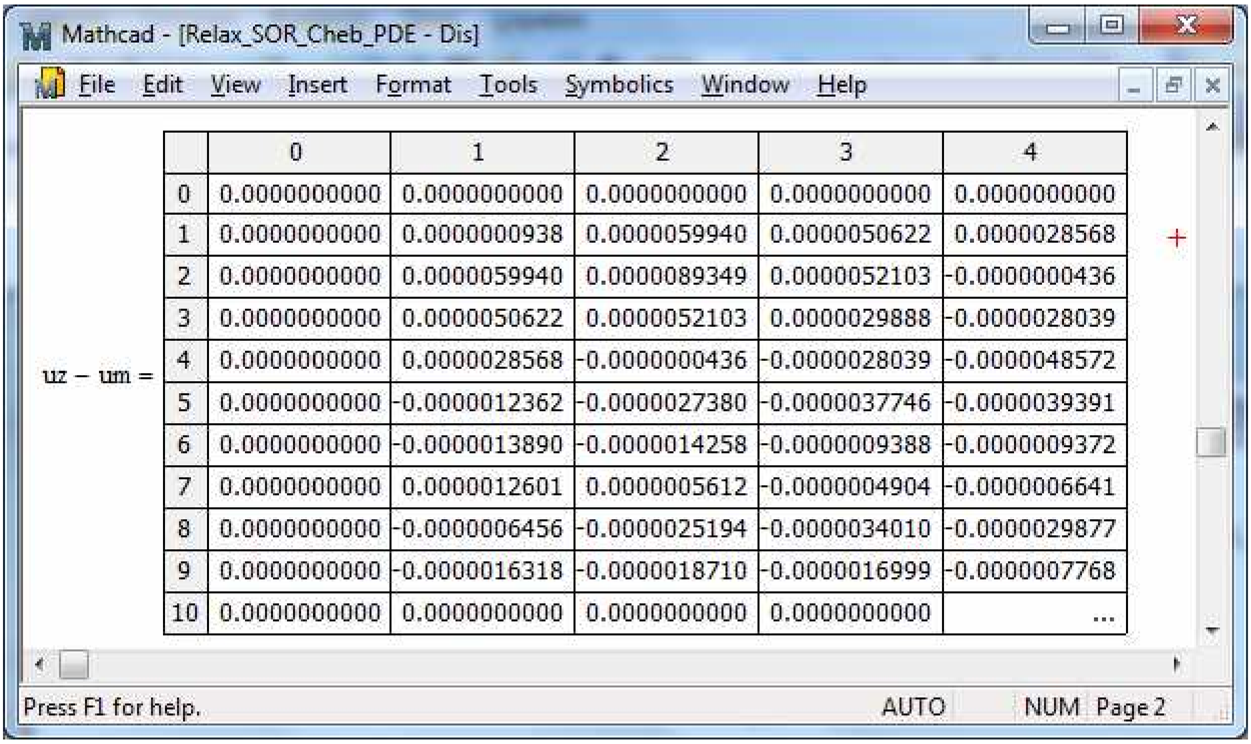
$SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქცია შედეგში ღებულობს კვადრატულ მატრიცას, რომელშიც მატრიცის ელემენტების განლაგება შეესაბამება კვადრატში წერტილების განლაგებას, ხოლო მნიშვნელობა – ამ წერტილში მიახლოებით ამონახსნს.

ნახ. 4–ზე მოცემულია $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქციის გამოყენებით ჰელმჰოლცის განტოლების ამოხსნის ფრაგმენტი Mathcad–ში. ამ შემთხვევაში $e_{i,j}$ მატრიცა გამოითვლება შემდეგნაირად $e_{i,j} = -4 - h^2 q(x_i, y_j)$.



ნახ. 4. განტოლების ამოხსნის ფრაგმენტი

ამ მაგალითში um–ით აღნიშნულია მიახლოებითი ამონახსნი, ხოლო uz–ით – ზუსტი ამონახსნი. ნახ.5.–ზე მოცემულია ზუსტ ამონახსნსა და $SOR\_Cheb\_PDE(a, b, c, d, e, f, u, \varepsilon)$ ფუნქციით გამოყენებით გამოთვლილ მიახლოებით ამონახსნს შორის სხვაობა ცხრილური სახით.



uz − um =

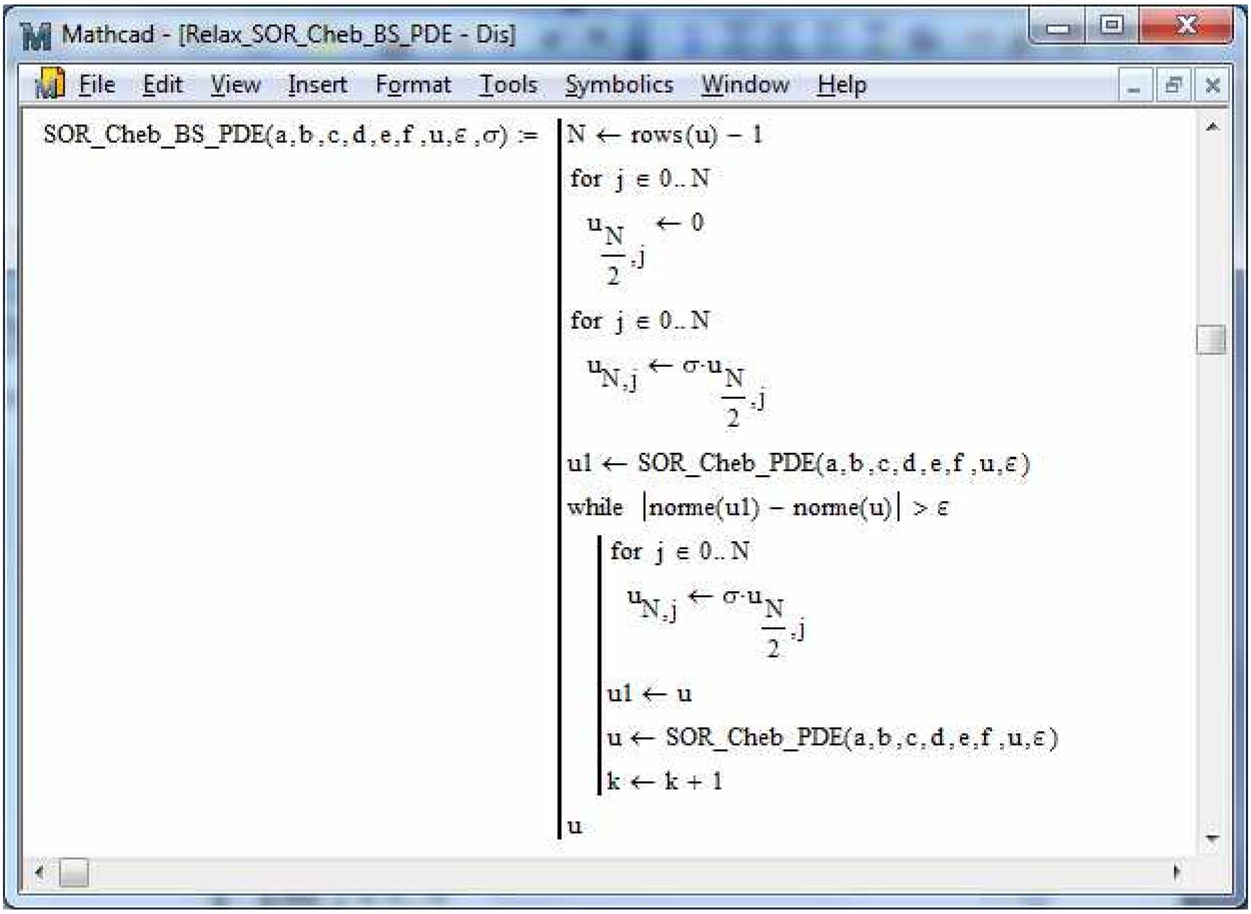
	0	1	2	3	4
0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.0000000000	0.0000000938	0.0000059940	0.0000050622	0.0000028568
2	0.0000000000	0.0000059940	0.0000089349	0.0000052103	-0.0000000436
3	0.0000000000	0.0000050622	0.0000052103	0.0000029888	-0.0000028039
4	0.0000000000	0.0000028568	-0.0000000436	-0.0000028039	-0.0000048572
5	0.0000000000	-0.0000012362	-0.0000027380	-0.0000037746	-0.0000039391
6	0.0000000000	-0.0000013890	-0.0000014258	-0.0000009388	-0.0000009372
7	0.0000000000	0.0000012601	0.0000005612	-0.0000004904	-0.0000006641
8	0.0000000000	-0.0000006456	-0.0000025194	-0.0000034010	-0.0000029877
9	0.0000000000	-0.0000016318	-0.0000018710	-0.0000016999	-0.0000007768
10	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	...

ნახ. 5. სხვაობა ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნს შორის

3. ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა MathCad-ში

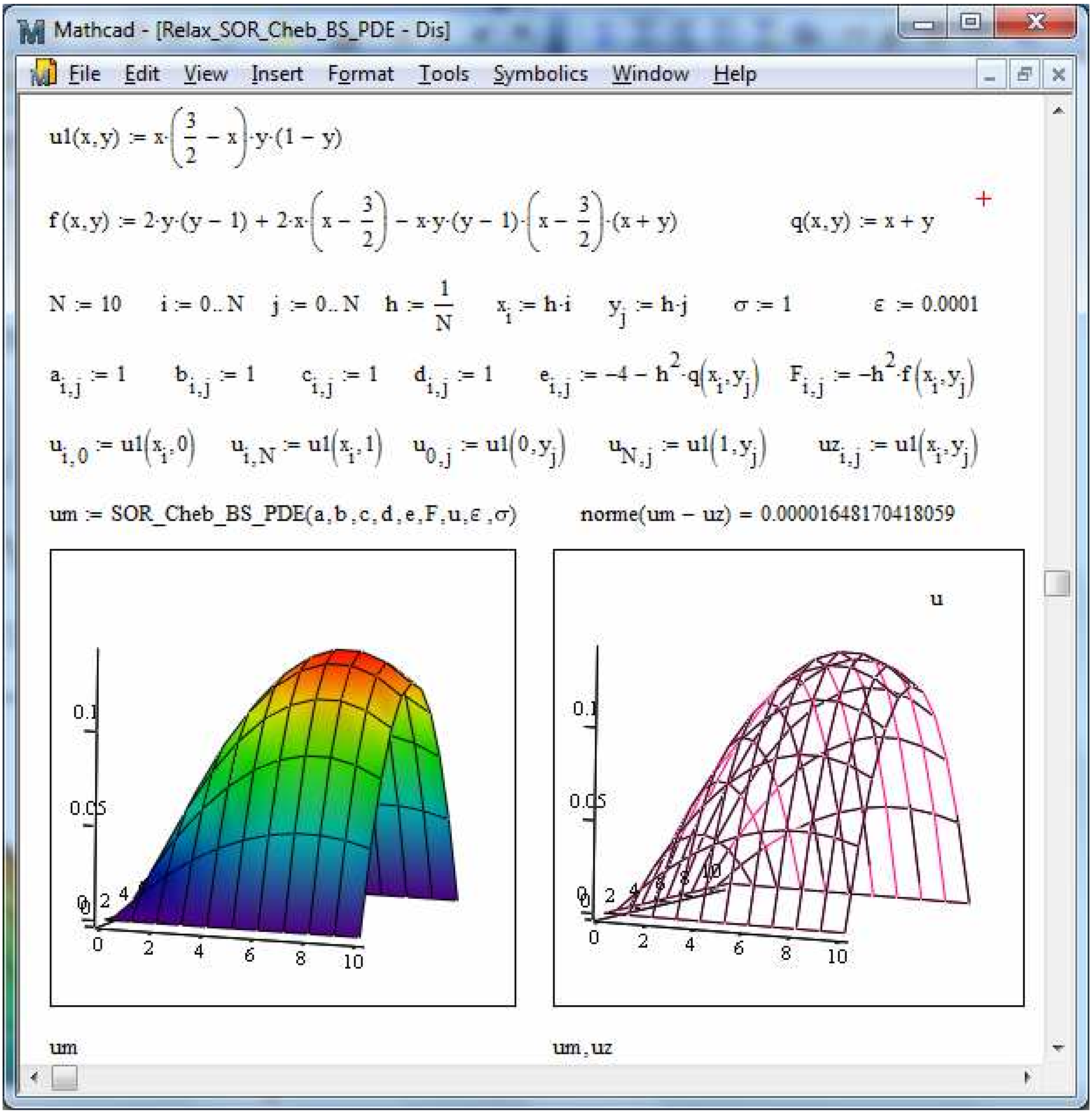
როგორც მეორე თავში აღვნიშნეთ, ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისათვის ვიყენებთ დირიხლეს ამოცანების მიმდევრობაზე დაყვანის ალგორითმს. განვიხილოთ ამ ალგორითმის რეალიზაცია Mathcad–ში.

ნახ.6.–ზე მოცემულია Mathcad–ის ფრაგმენტი, სადაც შექმნილია $\mathrm{SOR\_Cheb\_BS\_PDE}(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქცია, რომელიც უზრუნველყოფს ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნას. ამ ალგორითმში იტერაციის ყოველ ეტაპზე დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა ხდება უკვე განხილული $\mathrm{SOR\_Cheb\_PDE}(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქციით გამოყენებით.



ნახ. 6. $SOR\_Cheb\_BS\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქცია,

ნახ.7.–ზე მოცემულია $SOR\_Cheb\_BS\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქციის გამოყენებით ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ფრაგმენტი Mathcad–ში. ამ შემთხვევაში $e_{i,j}$ მატრიცა გამოითვლება შემდეგნაირად $e_{i,j}=-4-h^2q(x_i,y_j)$ და $\sigma=1$.



ნახ. 7. ბს–ს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ფრაგმენტი

ამ მაგალითში um–ით აღნიშნულია მიახლოებითი ამონახსნი, ხოლო uz–ით – ზუსტი ამონახსნი. ნახ.8.–ზე მოცემულია ზუსტ ამონახსნსა და $SOR\_Cheb\_BS\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქციის გამოყენებით გამოთვლილ მიახლოებით ამონახსნს შორის სხვაობა ცხრილური სახით.

Mathcad - [Relax_SOR_Cheb_BS_PDE - Dis]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

uz − um =

	0	1	2	3	4
0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.0000000000	0.0000001966	0.0000004350	0.0000006033	0.0000007140
2	0.0000000000	0.0000004460	0.0000008951	0.0000012116	0.0000013769
3	0.0000000000	0.0000006968	0.0000012456	0.0000015454	0.0000015815
4	0.0000000000	0.0000007473	0.0000012064	0.0000013568	0.0000012363
5	0.0000000000	0.0000006293	0.0000009965	0.0000011216	0.0000010340
6	0.0000000000	0.0000005719	0.0000009603	0.0000011544	0.0000011556
7	0.0000000000	0.0000006186	0.0000010975	0.0000014163	0.0000015529
8	0.0000000000	0.0000007648	0.0000014065	0.0000019099	0.0000022624
9	0.0000000000	0.0000010207	0.0000018922	0.0000026400	0.0000033399
10	0.0000000000	0.0000014500	0.0000025529	0.0000034952	...

ნახ. 8. სხვაობა ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნს შორის

4. არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა MathCad-ში

შეუღლებული განტოლების ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმი. ვთქვათ $\overline{G}$ არე არის მართკუთხედი, $\overline{G}=[0,1]\times[0,1]$, Γ - G არის საზღვარი, $0<x_0<1$, $\gamma_0=\{(x_0,y):\ 0\le y\le 1\}$, $\gamma=\{(1,y):\ 0\le y\le 1\}$, $c(x,y)\in L_p(\overline{G})$, $p>2$, $0\le q(x,y)\in L_\infty(\overline{G})$. $\overline{G}$ არეში განვიხილოთ არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლების შეუღლებული განტოლებისათვის:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-q(x,y)\psi=-c(x,y),\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\ \psi(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\\ \frac{\partial\psi(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial\psi(1,y)}{\partial x},\quad 0\le y\le 1,\end{gathered}\tag{1.28}$$

(1.28) შეუღლებული ამოცანის ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად $\psi=w+w^*$, სადაც w^* – დირიხლეს ამოცანის ამონახსნია:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}-q(x,y)w^*=-c(x,y),\quad (x,y)\in G,\\ w^*(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma,\end{gathered}\tag{1.29}$$

ხოლო w – არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნია:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-q(x,y)w=0,\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\&w(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\\&\frac{\partial w(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial w(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial w(1,y)}{\partial x}+\sigma\frac{\partial w^*(1,y)}{\partial x},\quad 0\le y\le 1.\end{aligned}\tag{1.30}$$

როგორც უკვე განვიხილეთ (1.30) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. (1.30) ამოცანის ამოხსნისათვის განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial y^2}-q(x,y)w^{k+1}=0,\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,\\&w^{k+1}(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\\&\frac{\partial w^{k+1}(x_0^+,y)}{\partial x}-\frac{\partial w^{k+1}(x_0^-,y)}{\partial x}=\sigma\frac{\partial w^k(1,y)}{\partial x}+\varphi(y),\quad 0\le y\le 1,\quad k=0,1,2,...,\end{aligned}\tag{1.31}$$

სადაც $\varphi(y)=\sigma\dfrac{\partial w^*(1,y)}{\partial x}$, $w^0(x,y)$ - საწყისი მიახლოებაა.

(1.31) ამოცანა ექვივალენტურია შემდეგი ამოცანის:

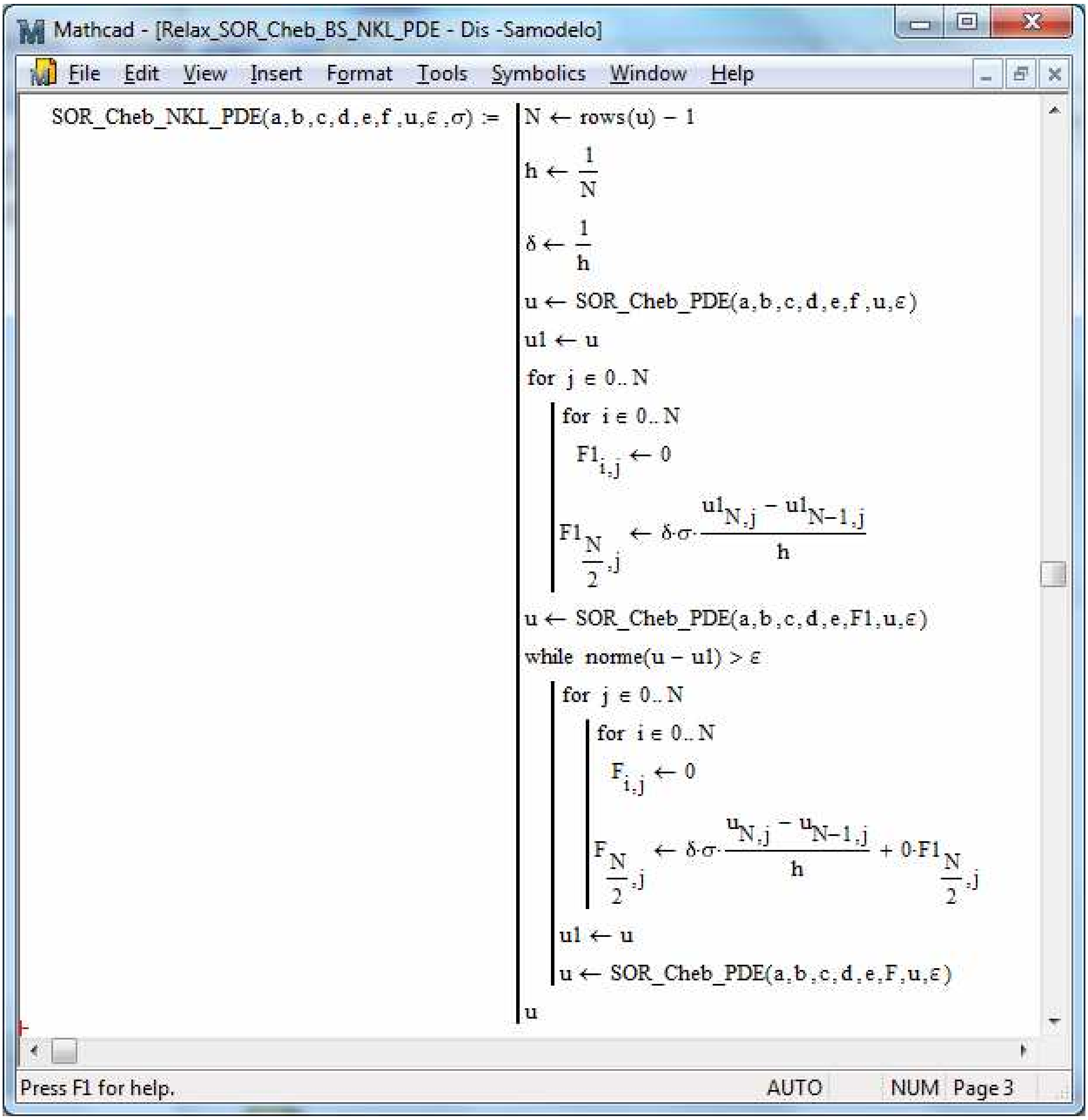
$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^{k+1}}{\partial y^2}-q(x,y)w^{k+1}=\delta(x_0-x)\left(\sigma\frac{\partial w^k(1,y)}{\partial x}+\varphi(y)\right),\quad (x,y)\in G,\\&w^{k+1}(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\quad k=0,1,2,...\ ,\end{aligned}\tag{1.32}$$

სადაც $\delta(x_0-x)$ - დირაკის ფუნქციაა.

როგორც უკვე წინა თავში ვაჩვენეთ, თუ $0<\sigma\le\sigma_0$, მაშინ (1.32) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

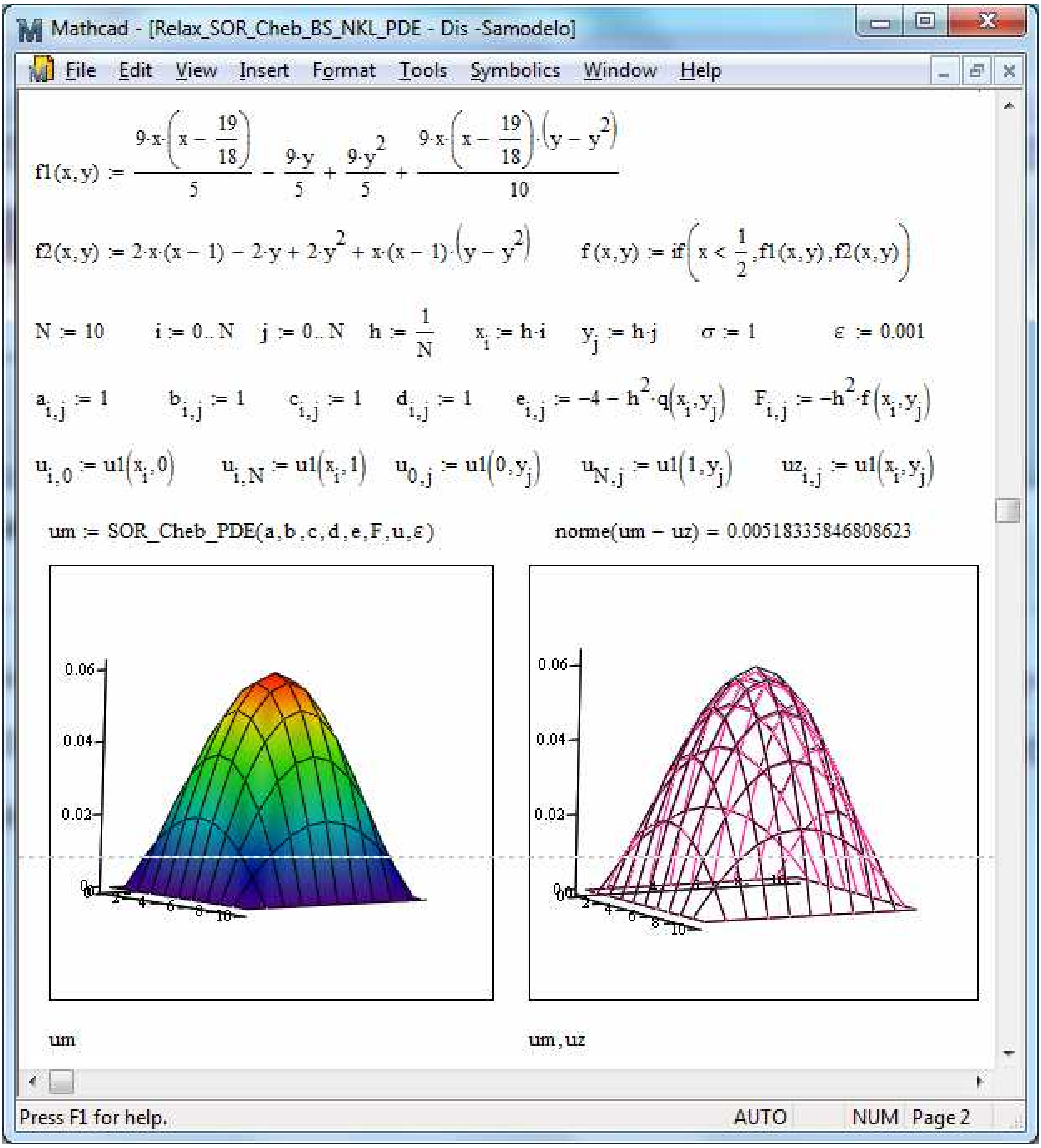
(1.32) ამოცანის ამოხსნისათვის იტერაციის ყოველ ბიჯზე გამოვიყენოთ Mathcad-ში ჩვენს მიერ შექმნილი $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქცია. ამ განტოლების ამოხსნისათვის შევქმნათ კიდევ ერთი დამატებითი ფუნქცია.

ნახ.9.–ზე მოცემულია Mathcad–ის ფრაგმენტი, სადაც შექმნილია $SOR\_Cheb\_NKL\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქცია, რომელიც უზრუნველყოფს (1.32) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნას. ამ ალგორითმში იტერაციის ყოველ ეტაპზე დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა ხდება უკვე განხილული $SOR\_Cheb\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon)$ ფუნქციით გამოყენებით.



ნახ. 9. $SOR\_Cheb\_NKL\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქცია,

ნახ.10.–ზე მოცემულია $SOR\_Cheb\_NKL\_PDE(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქციის გამოყენებით ჰელმჰოლცის განტოლების შეუღლებული განტოლებისათვის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ფრაგმენტი Mathcad–ში. მაგალითისათვის აღებულია სამოდელო ამოცანა.



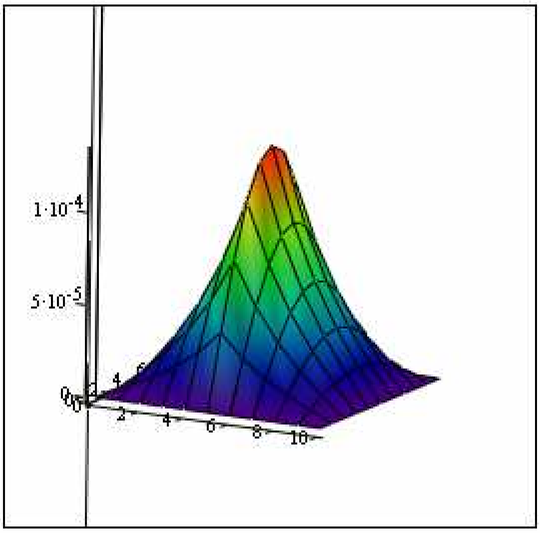
ნახ. 10. არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ფრაგმენტი

ამ მაგალითში um–ით აღნიშნულია მიახლოებითი ამონახსნი, ხოლო uz–ით – ზუსტი ამონახსნი. ნახ. 11–ზე მოცემულია ამონახსნის გრაფიკული სახე, ასევე ზუსტ ამონახსნსა და $\mathrm{SOR\_Cheb\_NKL\_PDE}(a,b,c,d,e,f,u,\varepsilon,\sigma)$ ფუნქციით გამოყენებით გამოთვლილ მიახლოებით ამონახსნს შორის სხვაობა ცხრილური სახით.

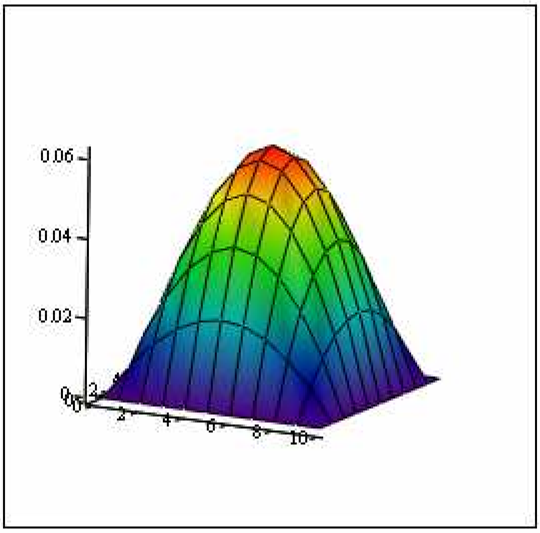
Mathcad - [Relax_SOR_Cheb_BS_NKL_PDE - Dis -Samodelo]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

$\sigma := .05$ umN := SOR_Cheb_NKL_PDE(a, b, c, d, e, F, u, ε, σ)



umN



um + umN

uE := uz − (um + umN)

uE =

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.000000	0.000052	0.000104	0.000144	0.000169	0.000178	0.000169
2	0.000000	0.000115	0.000220	0.000303	0.000355	0.000373	0.000354
3	0.000000	0.000192	0.000362	0.000495	0.000578	0.000606	0.000576
4	0.000000	0.000289	0.000543	0.000739	0.000861	0.000901	0.000859
5	0.000000	0.000424	0.000787	0.001062	0.001232	0.001289	0.001231
6	0.000000	0.000289	0.000542	0.000737	0.000859	0.000900	0.000858
7	0.000000	0.000191	0.000361	0.000492	0.000575	0.000604	0.000575
8	0.000000	0.000117	0.000221	0.000302	0.000353	0.000370	0.000353
9	0.000000	0.000055	0.000105	0.000143	0.000167	0.000176	0.000167
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	...

Press F1 for help. AUTO NUM Page 3

ნახ. 11. სხვაობა ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნს შორის

დასკვნა

თეორიული და პრაქტიკული საკითხების განხილვის საფუძველზე მიღებულია ძირითადი შედეგები:

1. მიღებულია პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ბიწაძე-სამარსკის სასაზღვრო ამოცანის განზოგადოებული ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები $C_\alpha(\overline{G})$ სივრცეში, ხოლო წრფივი შემთხვევისათვის მიღებულია განზოგადოებული ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები $C_\alpha^p(\overline{G})$ სივრცეში და შემდეგი აპრიორული შეფასება $\| w \|_{C_\alpha^p(\overline{G})} \leq \lambda \| d \|_{L_p(\overline{G})}$.
2. განხილულია ოპტიმალური მართვის ამოცანები პირველი რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობით, მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი პირობები. წრფივი ოპტიმალური მართვის ამოცანებისათვის მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.
3. წრფივი ელიფსური განტოლებებისათვის ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო პირობებით მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, დამტკიცებულია არაკლასიკური სასაზღვრო პირობებიანი შეუღლებული განტოლების განზოგადოებული ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა $W_2^2(G \setminus \gamma_0) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(G)$ სივრცეში..
4. მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე აგებულია წრფივი ოპტიმალური მართვის ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმები. შედგენილია ბიწაძე–სამარსკის სასაზღვრო ამოცანების და არაკლასიკური შეუღლებული ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები, როგორც მეორე რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის, ასევე ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის. შექმნილია ამ ალგორითმების შესაბამისი პროგრამული მოდულები Mathcad-ში, შესრულებულია რიცხვითი რეალიზაცია და მიღებული რიცხვითი შედეგები წარმოდგენილია ცხრილური და გრაფიკული სახით.

ლიტერატურა:

1. Ashyralyev A. Finite diference method for multipoint nonlocal elliptic-parabolic problems / A. Ashyralyev, O. Gercek // Comput. Math. Appl._ 2010._ Vol. 60, No 7._ P. 2043-2052.
2. Ashyralyev A., Gercek O., Nonlocal boundary value problem for elliptic-parabolic differential and difference equations. Discrete Dyn. Nat. Soc. – 2008 – Art.ID 904824 – 16p.
3. Bashnyakov O. Practical stability, estimates and optimization / O. Bashnyakov, F. Garaschenko._ Kyiv: Kyiv University, 2008. (in Ukrainian).
4. Beals R., Nonlocal Elliptic Boundary Value Problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1964, V.70, No 5, p. 693-696
5. Beridze V. Sarajishvili C. Algorithm Solution of an Adjoint Problem. // II International Scientific Conference Computing/Computer Science, Education Sciences, Teaching Education. Batumi, September, 21-3, 2012, Abstracts, Batumi. 2012.
6. Berikelashvili G. On the solvability of a nonlocal boundary value problem in the weighted Sobolev spaces / G. Berikelashvili // Proc. A. Razmadze Math. Inst._1999._Vol. 119._P. 3-11.
7. Berikelashvili G. Construction and analysisi of difference schemes of the rate convergence, Memoirs om Diff. Euqat. and Math. Physics, V. 38, 2006, pp. 1-36.
8. Berikelashvili G., Gordeziani D., Kharibegashvili S., Finite- Difference Schemes for One Mixed Problem with Integral Condition, Proceedings of 2nd WSEAS International Conference on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements (F-and B, 09), Tbilisi, Georgia, June 26-28, 2009, pp.118-120.
9. Berikelashvili G., On non-local boundary value problem for two-dimensional elliptic equations, Comput. Methods Appl. Math., 3, 2003, No 1, pp.35-44.
10. Berikelashvili G., To a nonlocal generalization of the Dirichlet problem // J.Inequal. Appl. – 2006, Art.ID 93858 – 6p.

11. Bouziani A., On a class of parabolic equations with a non-local boundary conditions // Acad. Roy. Belg. Bull. CI, Sci. (6), 10, 1999 (№1-6) – pp.61-67.
12. Browder F.E., Non-local elliptic boundary value problems, Amer. J. Math, 86(1964), p. 735-750.
13. Canon J.R., The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math., №21 – 1963 – pp.155-160.
14. Carleman T., Sur la tehorie des equatuibs integrals et ses applications, Verh. Internat. Math. Kongr., Zurich, 1932, 1, (Orell Fussli, Zurich), 1933, 138-151
15. Criado F., Meladze H., Odishelidze N.. An Optimal Control Problem for Helmholtz Equation with Non-local Boundary Conditions and Quadratic Functional // Rev. R. Acad. Scienc. Exact. Fis. Mat. (Esp.) – 1997 – vol.91, №1 – pp.65-69
16. Devadze D. About Numerical Method of Solution of an Optimal Control Problem. Symposium on "Con-temporary Mathematics and its Application". Batumi. 2007
17. Devadze D. Abashidze M. Beridze V. Numerical Methods for Solving Some Optimization Problems of Resilience Theory. Scientific Conference Mathematics and Application, Abstracts, Batumi. 2009.
18. Devadze D. About a Numerical Method of Solution of an Optimal Control Problem for ordinary differential equation with non local boundary condition. Scientific Journal "INTELLECT", 3(23), Tbilisi. 2005.
19. Devadze D. About a Numerical Method of Solution of an Optimal Control Problem for second order ordinary linear differential equation with non local boundary condition. The Scientific and Pedagogical News of Odlar Yordu University, #15. Baki. 2006.
20. Devadze D. About one Numerical Method of Solution of the Problem of Optimal Control. Georg. Acad. Sci. 173-1. Tbilisi. 2006.
21. Devadze D. Beridze V. A Control Optimal Problem for Helmholtz Equations with Bitsadze–Samarski Boundary Conditions. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 2013. Vol. 161. pp. 47-53.

22. Devadze D. Beridze V. Algorithm Solution of an Optimal Control Problem. // II International Scientific Conference Computing/Computer Science, Education Sciences, Teaching Education. Batumi, September, 21-3, 2012, Abstracts, Batumi. 2012.
23. Devadze D. Beridze V. An Algorithm of the Solution of an Optimal Control Problem for a Nonlocal Problem. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences. 2013. pp. 44-48
24. Devadze D. Beridze V. An Optimal Control Problem for Quasilinear Diferential Equations with Bitsadze–Samarski Boundary Conditions. Journal of Mathematical Sciences. 2013.
25. Devadze D. Beridze V. Methods of the Numerical Solution of Optimal Control Problems Based on Pontryagin's Maximum Principle. Journal of Mathematical Sciences. 2013.
26. Devadze D. Beridze V. Solution Bitsadze-Samarski Problem for the Helmholtz Equation with Mathcad. // III International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, September, 2- 9, 2012, Book of Abstracts, Batumi. 2012.
27. Devadze D. Beridze V. Solution of an Optimal Control Problem with Mathcad. // III International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, September, 2-9, 2012, Book of Abstracts, Batumi. 2012.
28. Devadze D., Abashidze M., Beridze V., Numerical Methods for Solving Some Optimization Problems of Resilience Theory. Scientific Conference Mathematics and Application, Abstracts, Batumi. 2009.
29. Diaz O., Jesus Ildefonso, Rakotoson, Jean-Michell. On a non-local stationary free-boundary problem arising in the confinement of a plasma in a stellarator geometry, Arch.Rational. Mech. Anal., 134(1996), No 1, pp. 53-95.
30. Gavrilyuk I. Exponentially convergent algorithms for the operator exponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces / I. Gavrilyuk, V. Makarov // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2005. Vol. 43. No. 5. P. 2144-2171.

31. Gavrilyuk I. Exponentially convergent parallel discretization methods for the first order evolution equations / I. Gavrilyuk, V. Makarov // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM)._ 2001._ Vol. 1._ No 4._ P. 333-355.
32. Gavrilyuk I.P. Exponentially convergent approximation to the elliptic solution operator / I.P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B.Vasylyk // Comput. Methods Appl. Math._ 2006._Vol. 6._ No. 4._ P. 386-404.
33. Gavrilyuk I. P., Makarov V.L., Sytnyk D.O., Basylyk V.B., Exponentially convergent method for m-point nonlocal problem for a first order diff. equation in Banach Space, Friedrich-Schiller-Universitat Jena, Preprint: 09-02, Reports on Numerical Mathematics, MSC 65L05 Initial Value Problems Upload 2009-03-04.
34. Gordeziani D. G., On a method for solving the Bitsadze-Samarskii boundary value problem for elliptic equations, Inst, Prikl. Math.Tbilisi Gos. Univ., Dokl., No (1970), pp.39-41
35. Gordeziani D. G., Djioev T. Z., On the solvability of one boundary value problem dor a non-linear elliptic equations, 1972, Russiam Soobshen. Akad. Nauk.Gruz. SSSr, 68(No 2), pp. 189-292
36. Gordeziani D., Avalishvili G., Avalishvili M., On the investigation of a dimensional reduction method for elliptic problems, Rep. of the Sem. of I. Vekua Inst. Appl. Math., № 29, 2003, 15-25;
37. Gordeziani D., Avalishvili G., Time nonlocal problems for Schrodinger type equations, I and II parts Diff, Urav. V. 41, No 5,6, (2005), pp. 703-711, pp. 852-859.
38. Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G., Investigation of statical two-dimensional model of elastic plate, Proc. of Georgian Technical Univ., vol. 447, № 1, 2003, 9-17;
39. Gordeziani D., Gordeziani N., Avalishvili G., Nonlocal boundary value problems for some partial differential equations, Bull. Georgian Acad. Sci., vol. 157, № 3, 1998, 365-368;

40. Gordeziani D., Gordeziani N., Avalishvili G., On one class of nonlocal problems for partial differential equations, Rep. of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Inst. Appl. Math., vol. 10, № 3, 1995, 20-22;
41. Gordeziani D., Meladze H., Avalishvili G., On one class of nonlocal in time problems for first order evolution equations, J. Comp. and Appl. Math., vol. 88, № 1, 2003, 66-78;
42. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A., On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one dimensional medium oscillation equations // Mathem. Mod. – 2000, v.12, №1 – pp.93-103.
43. Gordeziani G., Gordeziani N., Avalishvili G., Non-local boundary value problem for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian Academy of Sciences - 157, №1, 1998 – pp.365-369.
44. Gordeziani G., Gordeziani N., On some generalization of non-local boundary value problem for elliptic equations // Bulletin of TICMI, Tbilisi Univ. Press – v.2, 1998 – pp.34-36.
45. Gordeziani N., Natalini N., Picci P. E., Finite-Difference Methods for Solution of Nonlocal Boundary Value Problems, Int. Journ. Computers & Mathematcis with Applications, 50(2005), pp.1333-1344
46. Gulin A. V., Marozova V. A., A family of selfjoint difference schemes, Diff. Urav. 44 (2008), No 9, pp. 1249-1254.
47. Gurevich P. L., Asymtotivcs of Solution for nonlocal elliptic problemsin plane nounded domains, Functional Differential Equations, Vol. 10, 2003, No 1-2, pp.175-214
48. Gushchin A. K., Mikhailov V.P., On the stability of nonlocal problems for a second order elliptic equation // Math. Sb. (1994), №1 – pp.121-160
49. Herhager M., Partoll H., Mathcad 2000: The Complete Guide: Trans. with Ger. - K.: Publishing Group, BHV, 2000. – 416p.

50. Il'in V. A two-dimensional nonlocal boundary value problem for the Poisson operator in the diferential and the diference interpretation / V. Il'in, E. Moiseev // Mat. Model._ 1990._ Vol. 2þ_ No. 8._ P. 139-156. (in Russian).
51. Ionkin N. I., Solution of boundary-value problem in heat-conduction theory with non-classical boundary conditions, Diff, Urav. 13(1977), pp.1177-1182
52. Kiryanov D.V. Mathcad 14, St. Petersburg.: BHV-Petersburg, 2007. -680p.
53. Kozhanov A., Pulkina L.,On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condiition of integral form for multidimensional hyperbolic equations // Diff. Equations – v.42, №9, September 2006 – pp.1233-1246.
54. Leung A. Optimal control of multigroup neutron fission systems / A. Leung, G.-S. Chen // Appl. Math. Optim._ 1999._ Vol. 40._ No 1._ P. 39-60.
55. Meladze H., Odishelidze N., Criado F., The necessary condition of the optimality for an optimal control problem for Helmholtz equation with non-local boundary conditions and a nonlinear functional / // Appl. Math. Inform._ 1999._ Vol. 4._ No 1._ P. 66-74.
56. Mesloub & S. Messaoudi, A nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations // Electr. Journal of Diff. Equat. – 2003, v.1, №30 – pp.1-17
57. Obolashvili E., Nonlocal problems for some partial differential equations, Applicable Analysis, Vol. 45 (1992), pp.269-280.
58. Pao C. V., Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions, J. Math. Anal. Appl., 195(1995), No 3, p. 702-718.
59. Samarskii A. A., Lazarov R. D. and Makarov V. L., Difference schemes for differential equations with generalized solutions, Vissh. Shkola, Moscow, 1987 (In Russian)
60. Samarskii A. Some problems of the theory of diferential equations / A. Samarskii // Diferentsial'nye Uravneniya._ 1980._ Vol. 16._ No 11._ P. 1925-1935.
61. Sapagovas M. P., A difference method of increased order of accuracy for the Poisson equation with nonlocal conditions // Diff. Uravn. – 44(2008), №7 – pp.988-998.
62. Sapagovas M. P., A difference scheme for two-dimensional elliptic problems with an integral condision, Litovsk.Mat. Sb. 28(1983), No 3, p.155-159.

63. Shakeris F., Dehghan M., The method of lines for solution of the one-dimensional wave equation subject to an integral consideration //comput. and Math. with Appl. – 2008, v.56, November – pp.2175-2188.
64. Sheen D. A. parallel method for time-discretization of parabolic equations based on laplace transformation and quadrature / D. Sheen, I. H. Sloan, V. Thom_ee //IMA Journal of Numerical Analysis._ 2003._ Vol. 23._ P. 269-299.
65. Shelukin V. V., A non-local in time model for radionuclide propagation in Stokes fluid, Dinamika Splosh. Sredy #107 (1993), 180-193, 203-207
66. Toutbery A. A. and Sheftel Z.G., On a class of general nonlocal elliptic problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 192)1970), pp. 511-513.
67. Vasylyk V., Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for an elliptic differential equation in banach space // Journal of Numerical and Applied Mathematics. Vol. 2. 2011. pp. 124-135.
68. Zhitarashu N. V. and Eiidelman S. D., Nonlocal boundary value problems for elliptic equations, Math. Issled. 6, No2,(220), 1971, pp.63-73
69. Алексеев А. С., Кирилов Ю.П., Исследование одного класса уравнений в частных производных с интегральными граничными условиями, Дифф. И Интегр. Уравнения, 1979, Горький, стр. 118-122
70. Алоев Т. В., Асланова Е.Н., Нелокальные задачи кондуктивного радиального теплообмена, Abstracts, Nalchik, 1996, Inter. Conference: Non-local Boundary Problem and Related Mathematical Biology, Informatic and Physic Problems.
71. Арман Ж. -Л. П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М. Мир 1977г. 144с.
72. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. - 256 с.
73. Бицадзе А. В., Самарский А. А., О некоторых простейших обобщениях линейных элиптических задач // Докл. АН СССР – 1969 – т.185, №2 – стр.739-740

74. Бутковский А. Г. Образ некоторых новых направлений, идей и результатов в проблеме управления системами с распределенными параметрами // Изв. АН СССР. Техн. Киб - 1983. - №2.- С 112-122.
75. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1977. - 623 с.
76. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М: физматгиз. 1988. 512 с.
77. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука 1981. 512с.
78. Гилбарг Д., Трудингер Н., Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, Наука, М.,1989.
79. Гловински Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. - М.: Мир, 1979. - 576 с.
80. Гордезиани Д. Г. О конечноразностных алгоритмах решения нелокальных краевых задач // Докл. расширенных заседаний семинара ИПМ им. И.Н. Векуа, ТГУ 1986. - Т. 2.- №3.-С. 24-27.
81. Гордезиани Д. Г. О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. Изд. ТГУ, Тбилиси. 1981. 32с.
82. Гордезиани Д. Г. Авалишвили Г. А., Решение нелокальных задач для одномерных колебаний среды, Мат. моделирование, том №1, 2000, ст. 94-103;
83. Гордезиани Д. Г., Гордезиани Д. Г. Об одном классе нелокальных краевых задач в теории упругости и теории оболочек. Тр. всесоюзного совещания-семинара в Тбилиси. - Тбилиси, 1984. – Т. 2. – с. 106-127.
84. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М.: ИЛ. 1962. Т.1.
85. Девадзе Д., Абашидзе М., Беридзе В. Численные методы решения некоторых задач оптимизаций в теории упругости. Scientific Journal ”INTELLECT. 2(34),Tbilisi. 2009.
86. Девадзе Д. Ш. Условия оптимальности и разностные методы решения задач теорий управления для эллиптических уравнений. Дис. работа, Тбилиси, 1988. с.144.

87. Девадзе Д. Ш., Беридзе В. Ш. Условия оптимальности для квазилинейных дифференциальных уравнений. // Успехи Математических Наук. 2013. т. 68., вып. 4, с. 179-180.

88. Девадзе Д. Ш., Меладзе Г. В., Цуцунава Т. С. Необходимое условия оптимальности в системах с распределенными параметрами 1987. – 51 с. Деп. ГрузНИИНТИ 01.04.87. №300-187.

89. Егоров Ю. В., Некоторые задачи теории оптимального управления, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 3:5 (1963), 887–904.

90. Егоров Ю. В., Об оптимальном управлении в банаховом пространстве, УМН, 18:4(112) (1963), 211–213.

91. Ильин В. А., Моисеев Е. И., Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // Матем. Моделироапние – 1990, т.2, №8 – стр.130-156

92. Капанадзе Д. В., О нелокальной краевой задаче Бицадзе-Самарского // Дифф. Уравнения – 1987, т.23, №8 – стр.543-545.

93. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.

94. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики. М.Т.П. 1953. 356 с.

95. Ладыженская О. А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. Наука.1973. 576с.

96. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Издательство "МИР", Москва 1972 г. , 416 с.

97. Лионс Ж. Л. Об Оптимальном управлении распределенными системами // Успехи мат. Наук. - 1973. - Т. 28, вип. 4. - С. 15 - 47.

98. Ломтатидзе А. Г. Об одной краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с неинтегрируемыми особенностями. Труды института прикладной математики имени И.Н.Векуа ТГУ, 1983, т. 14.

99. Ломтатидзе А. Г. Об одной сингулярной трехточечной краевой задачи. – Труды института прикладной математики имени И.Н.Векуа ТГУ, 1986. т. 17.

100. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М. Наука 1975г. 480 с.

101. Манджавидзе Г. Ф., Тучке В. О некоторых граничных задачах для нелинейных дифференциальных систем первого порядка на плоскости. Изд. ТГУ, Ин-т ПМ. И.Н. Векуа. 1983. 123с.

102. Меладзе Г. В., Цуцунава Т. С., Девадзе Д. Ш. Задача оптимального управления для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости с нелокальными краевимы условиями. ТГУ, Тбилиси, 1987. Деп. в Груз. НИИНТИ, 25.12.87, №372, Г87, 61с.

103. Нахушев А. М., Уравнения математической биологии, Москва, «Высшая школа», 1995, стр. 302.

104. Очков В. Ф., Солодов А.П. "Mathcad / Дифференциальные модели", Издательство МЭИ, 2002.

105. Панеях Б. П., О некоторых нелокальных краевых задач для линейных дифференциальных операторов // Мат. Замет. – 1984, т.35, вып.3 – стр.425-433.

106. Плотников В.И. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида. – ДАН СССР, 199, #2, 1971.

107. Плотников В. И., Необходимое и достаточное условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Изв. АН СССР, сер. матем. 1972. Т.36. №3. С. 652-679.

108. Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу // ЖВМ и МФ 1972. Т.12. № 1. С. 61-77.

109. Плис А. И., Сливина Н. А. MathCad 2000, Математический практикум, Финансы и статистика, Москва, 2000.

110. Понтрягин Л. С., Принцип максимума в оптимальном управлении. М., 1990.

111. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р., В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

112. Поршнев ДС. В., Беленкова И. В.. Численные методы на базе Mathcad (+ CD). С-Пб: БХВ-Петербург, 2005, 456с.
113. Сакс С., Теория интеграла, М., 1949. 280с.
114. Самарский А. А., Теория разностных схем, М. «Наука», 1983г., стр. 614.
115. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравненный с обобщенными решениями. М.1987. 296с.
116. Сапаговас М. П., Чечис Р. Ю., О некоторых краевых задач с нелокальных условиями // Дифф. Уравнения – 1987, т.23, №7 – стр.1268
117. Скубачевский А. Л., О спектре некоторых нелокальных краевых задач // Матем. сборник,1982, т.117, №7, стр.548-562
118. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. 1988. 336с.
119. Соболев С. Л., Уравнения математической физики. М. 1950. 424с.
120. Троицкий В. А., Петухов Л. В. Оптимизация Формы упругих тел. - М.: Наука, I982. - 432 с.
121. Цигриашвили Э. Н. Некоторые задачи оптимизации строительных конструкций. Тр./ВЦ АН ГССР, 1983, вып.23, №2, с.61-73.
122. Цуцунава М. Т. Об одной оптимальной задаче для квазилинейных гиперболических систем с краевыми условиями типа Гурса. Сообщ. АН ГССР. – 1984. –Т. 115. с. 33-36.
123. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. - М.: Наука, 1969. - 577 с.