ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

რუსლან ცინარიძე

ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის შესახებ

ხელმძღვანელი პროფ. ვლადიმერ ბალაძე

დისერტაცია წარდგენილია მათემატიკის დოქტორის ხარისხის მოსაპოვებლად

ბათუმი 2016

სარჩევი

შესავალი

შეიპური თეორია არის გეომეტრიული ტოპოლოგიის მნიშვნელოვანი და გამოყენებების თვალსაზრისით მდიდარი დარგი. ის არის ANR -სივრცეთა, პოლიედრთა და სიმპლიციალურ კომპლექსთა ჰომოტოპიური ტიპის მქონე სივრცეთა ჰომოტოპიის თეორიის შინაარსიანი გაგრძელება უფრო ზოგად სივრცეთა კატეგორიებამდე.

შეიპური ტიპის თეორიები, რომელთათვისაც სამართლიანია კლასიკური შეიპური თეორიის რიგი შედეგები, არსებით როლს თამაშობენ თანამედროვე ტოპოლოგიაში, სისტემატურად მატულობს როგორც მათი რიცხვი, ისე მათი მეთოდების მნიშვნელობა ტოპოლოგიის სხვადასხვა დარგებში (ჰომოლოგიის თეორია, ჰომოტოპიის თეორია, რეტრაქტების თეორია, განზომილების თეორია, დინამიკური სისტემები, C^* -ალგებრები და სხვა) აღმოცენებული პრობლემების შესწავლისას.

თავდაპირველად შეიპური თეორია აგებული იქნა კ.ბორსუკის მიერ კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეთა კატეგორიისათვის, შემდეგ კი მეტრიზებად სივრცეთა კატეგორიისთვის ასახვათა ფუნდამენტური მიმდევრობების მეშვეობით ([Bo_2]-[Bo_4]).

ს.მარდეშიჩმა და ჯ.სეგალმა სივრცეთა შებრუნებული სისტემებით აპროქსიმაციის მეშვეობით ბორსუკის შეიპური თეორია გააგრძელა კომპაქტურ ჰაუსდორფის სივრცეთა კატეგორიამდე ([M-S_1]-[M-S_3]). ამის შემდეგ, იმავე გზით, რ.ჩ.ფოქსმა ბორსუკის თეორია გაავრცელა მეტრიზებად სივრცეთა კატეგორიაზე [Fo]. შეიპური თეორიის სხვა განზოგადება აღწერილი იქნა ბ.ჯ.ბოლის და რ.ბ.შერის მიერ [Ba-Sh], როცა მათ ააგეს საკუთრივი შეიპური თეორია ლოკალურად კომპაქტური სეპარაბელური სივრცეების და საკუთრივი ასახვების კატეგორიისათვის. გარდა ამისა, ბ.ჯ.ბოლმა [Ba] საკუთრივი შეიპური თეორია გამოიკვლია ლოკალურად კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების და საკუთრივი ასახვების კატეგორიისათვის, ხოლო ვ.ბალაძემ [B_7] ლოკალურად კომპაქტურ პარაკომპაქტურ სივრცეთა და საკუთრივ ასახვათა კატეგორიისთვის. პარაკომპაქტურ და p -პარაკომპაქტურ სივრცეთა შეიპური კლასიფიკაციები აღწერილი იქნა ა.შოსტაკის [Š] და ს.მარდეშიჩისა და ა.შოსტაკის [M-Š] მიერ. ნებისმიერ

ტოპოლოგიურ სივრცეთა კატეგორიისათვის შეიპური თეორია განვითარებული იქნა კ.მორიტას [Mor] და ს.მარდეშიჩის [M_1] მიერ.

აბსოლუტური მიდამოებრივი თანაბარი რეტრაქტების თანაბარი ჰომოტოპიის თეორიის, აბსოლუტური მიდამოებრივი ექვივარიანტული რეტრაქტების ექვივარიანტული ჰომოტოპიის თეორიის და აბსოლუტური მიდამოებრივი რეტრაქტების n-ჰომოტოპიის თეორიის შეიპური ტიპის გაფართოებები აგებულ და გამოკვლეულ იქნა მრავალი ავტორის მიერ.

თანაბარ სივრცეთა კატეგორიისათვის თანაბარი შეიპური თეორია განვითარებულ იქნა აგარონიანისა და სმირნოვის [A-S], ვ.ბალაძის ([B_8],[B_9],[B_{11}]), ვ.ბალაძისა და ლ.თურმანიძის ([B-Tu_1],[B-Tu_2]), დ. დოიჩინოვის ([Do_1]-[Do_3]), ნგუენ ანჰ კიეტის [Ki], ტ.მიუატას ([Mi_1]-[Mi_2]), ტ.მიუატასა და ჯ.სეგალის [Mi-S], ტ.მიუატასა და ტ.ვატანაბეს [Mi-W] და ნგუენ ტუ ნჰუს [Nh] მიერ.

ტოპოლოგიური ჯგუფების მოქმედების მქონე სივრცეთა ექვივარიანტული შეიპური თეორიის სათავეები უკავშირდება ს.ა. ანტონიანის, რ.ჯიმენეზის და ს.დე.ნეიმეტის [An-J-N], ს.ა. ანტონიანის და ს.მარდეშიჩის [An-M],ზ.ჩერინის [$Č_3$],პ.ს.გევორქიანის ([G_1]-[G_3])და ი.მ.სმირნოვის([Sm_1]-[Sm_3]) შრომებს. ექვივარიანტული შეიპური თეორიის პრობლემების გადაწყვეტაში მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ი.მ.სმირნოვისა და მისი მოსწავლეების შრომებში განვითარებულმა მეთოდებმა და მიღებულმა შედეგებმა.

n-შეიპური თეორია აგებულ იქნა ა. ჩიგოგიძის ([Ch_1],[Ch_2]) მიერ კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა კატეგორიისათვის. მისი შედეგები გავრცელებული იქნა ლოკალურად კომპაქტური სეპარაბელური სივრცეების და საკუთრივი ასახვების კატეგორიაზე ი.აკაიკეს ([Ak_1], [Ak_2]), ი.აკაიკესა და კ.საკაის [Ak-Sa] და კ.საკაის [Sa] მიერ. ნებისმიერი კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცეების კატეგორიისათვის n-შეიპური თეორია გამოკვლეული იქნა რ.ჯიმენეზის და ლ.რ.რუბინის [Ji-R] მიერ.

გარდა ამისა, არსებობს ფიქსირებული B_0 სივრცის მიმართ განხილული სივრცეების და უწყვეტი ასახვების ფიბრული შეიპური თეორიის სხვადასხვა ნაირსახეობა. ფიბრული

შეიპური თეორია წარმოადგენს ANR_{B_0}-სივრცეების ([Dol_2],[Y_2]) და ANR-ასახვების ([U], [N-S]) ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის გაგრძელებას.

ფიბრული შეიპური თეორია B_0-ზე განხილული კომპაქტური მეტრიკული სივრცეების და ფენების შემნახველი ასახვების კატეგორიისათვის განხილული იქნა ჰ.კატოს ([K_1]-[K_4]) და მ.კლაპისა და ლ.მონტეჯანოს [Cl-Mo] მიერ. ტ. იაგასაკის შრომებში ([Y_1]-[Y_4]) გამოკვლეული იქნა ფიბრული შეიპური თეორია B_0 მეტრიკული სივრცის მიმართ განხილული მეტრიკული სივრცეების და ფენების შემნახველი ასახვების კატეგორიისათვის. B_0 მეტრიკული სივრცის მიმართ განხილული ნებისმიერი სივრცეებისთვის, მეტრიკული სივრცეების ასახვებისთვის და ტოპოლოგიური სივრცეების ასახვებისთვის ფიბრული შეიპური თეორიები განვითარებული იქნა ვ.ბალაძის ([B_2]-[B_6],[B_{10}]), ზ.ჩერინის [$\check{C}_2$] და დ.ა.ედვარდსისა და პ.ტ.მაკაულეის [E-A] შრომებში.

კლასიკურ შეიპურ თეორიასა და მის ნაირსახეობებთან ერთად არსებობს თანამედროვე გეომეტრიული ტოპოლოგიის მნიშვნელოვანი დარგი, ე.წ. ძლიერი შეიპური თეორია, რომელსაც ტოპოლოგიაში (ზოგადი ტოპოლოგია, ალგებრული ტოპოლოგია, გეომეტრიული ტოპოლოგია) გამოყენებების გარდა ([M_3],[Md]) აქვს აგრეთვე საინტერესო გამოყენებანი მათემატიკის სხვა დარგებშიც (დინამიკური სისტემები, C^*-ალგებრები) ([H],[D]).

ძლიერი შეიპური თეორია სივრცეთა სხვადასხვა კატეგორიისათვის გამოკვლეული იქნა მრავალი ავტორის მიერ. კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა კატეგორიისათვის ექვივალენტური ძლიერი შეიპური თეორიები განვითარებული იქნა ფ.ვ.ბაუერის [Bau], ა.კალდერისა და ჰ.მ.ჰასტინგსის [Ca-H], ფ.ვ.კატეის [C_1], ჯ.დიდაკის და ჯ.სეგალის [Dy-S], დ.ა.ედვარდსის და ჰ.მ.ჰასტინგსის [E-H], ი.კოდამასა და ჯ.ონოს [Ko-O], ი.ლისიცას [L_4] და ჯ.ბ.ქვიგლის [Q] მიერ.

ზოგადი ტოპოლოგიური სივრცეების კატეგორიისათვის და ნებისმიერი კატეგორიისათვის ძლიერი შეიპური თეორია აგებული იქნა მ.ბატანინის [Bat], ფ.ვ.ბაუერის [Bau], ჯ.დიდაკის და ს.ნოვაკის ([$Dy\text{-}N_1$],[$Dy\text{-}N_2$]), ი.ტ.ლისიცას [L_3],

ი.ტ.ლისიცასა და ს.მარდეშიჩის [L-M], ზ.მიმინოშვილის [Mim] და ლ.სტრამასსიას [St]მიერ. ძლიერი შეიპური თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოხსნილ იქნა ტოპოლოგიის მრავალი სერიოზული პრობლემა [M_3].

შეიპური თეორიის განვითარების თანამედროვე პერიოდისთვის დამახასიათებელია ძლიერი შეიპური თეორიის სხვადსხვა ვერსიის აგება და განვითარება.

ექვივარიანტული ჰომოტოპიის ცნებაზე დაფუძნებული ძლიერი შეიპური თეორია აგებული იქნა ვ.ბალაძის [B_1] მიერ მეტრიკული G-სივრცეებისათვის და ა.ბიკოვისა და მ.ტექსისის [By-Te_2] მიერ კომპატური მეტრიკული G-სივრცეებისათვის.

ძლიერი შეიპური თეორია, დაფუძნებული n-ჰომოტოპიის ცნებაზე, განვითარებული იქნა ი.ივამოტოსა და კ.საკაის [I-Sa] მიერ.

ფიბრული ტოპოლოგია არის ჰომოტოპიური ტოპოლოგიის ახალი მიმართულება და დღეს უჭირავს ერთერთი ცენტრალური ადგილი თანამედროვე ტოპოლოგიაში ([Cr-J], [J_1],[J_2],[Po]). ის აღმოცენდა ზოგადი ტოპოლოგიის, ალგებრული ტოპოლოგიის და გეომეტრიული ტოპოლოგიის მიჯნაზე. მისი მეთოდები წარმატებით გამოიყენება როგორც ტოპოლოგიის, ისე დიფერენციალური გეომეტრიის, ლის ჯგუფების და დინამიკური სისტემების ამოცანების კვლევისას. ამიტომ ფიბრული სივრცეების ახალი თვისებების და მახასიათებლების დადგენას აქვს დიდი მნიშვნელობა ზოგადად მათემატიკისთვის. აქედან გამომდინარე, ფიბრული ტოპოლოგიისათვის ძლიერი შეიპური თეორიის აგება არის საინტერესო და აქტუალური ამოცანა.

ისევე როგორც, ძლიერი შეიპური თეორია აღმოცენდა ჰომოტოპიის თეორიიდან, ასევე ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია წარმოიქმნება ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიიდან. ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის განვითარება არის ფიბრული ტოპოლოგიის განვითარების ბუნებრივი პროცესი, რაც იძლევა შეიპების თეორიის მეთოდებით ფიბრული ტოპოლოგიის, კერძოდ, ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის შემდგომი კვლევის პერსპექტივას.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია ფიბრული ტოპოლოგიის ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის განვითარება, კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა და,

ზოგადად, ტოპოლოგიურ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კლასიფიკაციის აგების ამოცანის გამოკვლევა, იმ აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენა, რომელთა შესრულების შემთხვევაში შეიპური მორფიზმები არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები. შრომა მიზნად აგრეთვე ისახავს მთავარი ფოკუსი გადატანილ იქნეს ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე.

თავდაპირველად მოვიყვანოთ ნაშრომის შედეგების მოკლე აღწერა თავების მიხედვით.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავისა და გამოყენებული ლიტერატურის მომცველი ბიბლიოგრაფიული ნუსხისგან.

შესავალში მოკლედ აღწერილია შეიპური და ძლიერი შეიპური თეორიების განვითარების ისტორია და სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები.

პირველი თავი ეძღვნება ფიბრული ტოპოლოგიის მიმოხილვას, დაწყებულს საბაზისო თეორიით და გაგრძელებულს ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის და ფიბრული რეტრაქტების თეორიის რჩეული და სპეციალური საკითხებით. პირველი თავი აგრეთვე ეხება ბორსუკის ფიბრულ წყვილებს, ძლიერ შეიპურ დეფორმაციულ ასახვებს და B_0-ზე ფიბრანტულ სივრცეებს. მეორე თავში განმარტებულია და შესწავლილია ფიბრული კოტელესკოპები, აგებულია B_0-ზე კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია და მოცემულია ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობების დახასიათებები. მესამე თავში შესწავლილია ფიბრული ANR_{B_0}-რეზოლვენტები და განვითარებულია ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის.

ახლა მოვიყვანოთ დისერტაციაში მიღებული შედეგების დაწვრილებითი მიმოხილვა.

თავი 1-ის პარაგრაფ 1.1-ში მიღებულია B_0-ზე სივრცეების ბორსუკის წყვილების დახასიათებებთან დაკავშირებული ზოგიერთი შედეგი.

ბორსუკის ფიბრული წყვილების თვისებები აღწერილია შემდეგ წინადადებებში.

თეორემა 1.1.1. B_0-*ზე ასახვა* $i:(A,®_A)\to(X,®_X)$ *არის კოფიბრაცია* B_0-*ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* B_0-*ზე* $j:(\mathrm{Cyl}(i),®_{\mathrm{Cyl}(i)})\to(X\times I,®_{X\times I})$ *ასახვა არის რეტრაქტირებადი.*

შედეგი 1.1.2. B_0-*ზე* X *სივრცის და მისი ჩაკეტილი* A *ქვესივრცის* (X,A) *წყვილი არის ბორსუკის წყვილი* B_0-*ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $(X\times\{0\})\cup(A\times I)\subset X\times I$ *არის* $X\times I$ -*ის რეტრაქტი* B_0 -*ზე.*

შედეგი 1.1.3. *ყოველი* (X,A) *ჩაკეტილი ბორსუკის წყვილისათვის* B_0-*ზე და ყოველი* B_0-*ზე* Y *სივრცისთვის* $(X\times Y,A\times Y)$ *არის ბორსუკის ჩაკეტილი წყვილი* B_0-*ზე.*

შედეგი 1.1.4. *თუ* (X,A) *არის ბორსუკის წყვილი* B_0-*ზე და* A *არის* X *ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ ყოველი* B_0-*ზე* Y *სივრცისთვის* $i^*:Y^X\to Y^A$ *ასახვა არის* B_0-*ზე კოფიბრაცია.*

თეორემა 1.1.5. B_0-*ზე* $(X,®_X)$ *სივრცის და მისი ჩაკეტილი* $(A,®_{X|A})$ *ქვესივრცის* (X,A) *წყვილი არის ბორსუკის წყვილი* B_0-*ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი* $\cdot:X\to I$ *ასახვა და* A-*ს მიმართ* $G:(X\times I,®_{X\times I})\to(X,®_X)$ *ფიბრული ჰომოტოპია, რომ* $A=\cdot^{-1}(0)$, $G(x,0)=x$ *და* $\cdot(x)<t$ *მნიშვნელობისთვის* $G(x,t)\in A$.

თეორემა 1.1.6. *ვთქვათ* (X,A) *არის ბორსუკის წყვილი* B_0-*ზე. მაშინ*

$$(X\times I,(X\times\{0\})\cup(A\times I)\cup X\times\{1\})$$

არის ბორსუკის წყვილი B_0-*ზე.*

თეორემა 1.1.7. *ვთქვათ* (X,A) *არის ბორსუკის წყვილი* B_0-*ზე. მაშინ* B_0-*ზე რეტრაქცია* $r:(X,®_X)\to(A,®_{X|A})$ *არის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია* B_0-*ზე.*

თეორემა 1.1.8. B_0-*ზე სივრცეების ჩაკეტილი* (X,A) *წყვილი არის ბორსუკის წყვილი* B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\tilde{A}=(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ *არის* $(X\times I,®_{X\times I})$-*ის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი* B_0-*ზე.*

შედეგი 1.1.9. *ვთქვათ* (X,A) *არის ბორსუკის ჩაკეტილი წყვილი* B_0-*ზე. მაშინ* $(A,®_A)$ ქვესივრცე არის $(X,®_X)$-*ის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი* B_0-*ზე მაშინ და*

მხოლოდ მაშინ, როცა $i:(A,®_A)\to(X,®_X)$ *ჩადგმა არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა.*

თავი 1-ის პარაგრაფ 1.2-ში მოცემულია შეიპური ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქციის ასახვასთან (SSDR-ასახვასთან) და ფიბრანტულ სივრცეებთან ასოცირებული განმარტებები და ცნებები და დადგენილია მათი თვისებები.

თავი 1-ში განხილული ყველა სივრცე არის მეტრიზებადი. აქ საბაზისო განმარტებაა შემდეგი

განსაზღვრება 1.2.1. *ვთქვათ,* $(X,®_X)\in ob(\mathbf{M}_{\mathrm{B}_0})$ *და* A *არის* X *სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე.* B_0*-ზე* $(A,®_{X|A})$ *ქვესივრცეს ეწოდება* $(X,®_X)$ *სივრცის შეიპური ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი* B_0*-ზე, თუ არსებობს* $\sim:(X,®_X)\to(Y,®_Y)\in\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$ *ჩადგმა* B_0*-ზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:*

$(Y,®_Y)$*-ში* $\sim(X)$ *და* $\sim(A)$ *ანასახების ნებისმიერი* U *და* V *მიდამოებისთვის არსებობს* B_0*-ზე ისეთი ჰომოტოპია* $H:(X\times I,®_{X\times I})\to(U,®_{Y|U})\,\mathrm{rel}A$*, რომ ყოველი* $x\in X$ *წერტილისთვის* $H(x,0)=\sim(x)$ *და* $H(x,1)\in V$.

განმარტებიდან ჩანს რომ, თუ $\sim:(X,®_X)\to(M,®_M)$ ჩადგმა B_0-ზე აკმაყოფილებს 1.2.1 განმარტების პირობებს, მაშინ ეს პირობები სრულდება ყოველი $:(X,®_X)\to(Z,®_Z)\in\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$ ჩაკეტილი ჩადგმისათვის B_0-ზე.

B_0-ზე $i:(A,®_A)\to(X,®_X)$ ჩაკეტილ ჩადგმას ეწოდება $\mathrm{SSDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვა, თუ i ასახვა $(A,®_A)$-ს ჩადგამს $(X,®_X)$-ში, როგორც $(X,®_X)$-ის შეიპურ ძლიერ დეფორმაციულ რეტრაქტს B_0-ზე.

$\mathrm{SSDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვის ცნება აზოგადებს $\mathrm{SDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვის ცნებას. თავი 1-ის პარაგრაფ 2.1-ის შედეგთა შორის ერთერთი მთავარია

თეორემა 1.2.2. *ვთქვათ,* $(X,®_X)\in\mathrm{M}_{\mathrm{B}_0}$ *და* A *არის* X*-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე. მაშინ ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

a) $i:(A,®_{X|A})\to(X,®_X)$ *არის* SSDR*-ასახვა* B_0*-ზე;*

b) *ყოველი* B_0*-ზე* $f:(A,\circledR_{X|A})\to(Y,\circledR_Y)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *ასახვისათვის არსებობს ისეთი* $\tilde{f}:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ *ასახვა* B_0*-ზე, რომ* $\tilde{f}\cdot i=f$ *და ნებისმიერი ორი ასეთი* B_0*-ზე გაფართოება არის ფიბრულად ჰომოტოპიური* iA *ანასახის მიმართ;*

c) *ყოველი კომუტაციური დიაგრამისათვის*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] \arrow[dd, "i"'] & & E \arrow[dl, "\pi_E"'] \arrow[dd, "p"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
X \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[rr, "F"'] \arrow[uurr, dashed, bend right, "\tilde{F}"'] & & B, \arrow[ul, "\pi_B"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $p:(E,\circledR_E)\to(B,\circledR_B)$ *არის ფიბრაცია* B_0*-ზე და* $(E,\circledR_E)$ *და* $(B,\circledR_B)$ *არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცეები, არსებობს ისეთი* $\tilde{F}:(X,\circledR_X)\to(E,\circledR_E)$ *ასახვა* B_0*-ზე, რომ* $\tilde{F}\cdot i=f$ *და* $p\cdot\tilde{F}=F$.

d) B_0*-ზე ასახვების ყოველი კომუტაციური დიაგრამისათვის*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] \arrow[dd, "i"'] & & P^K_{\mathrm{B}_0} \arrow[dl, "\pi_{P^K}"'] \arrow[dd, "j^*"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
X \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[rr, "F"'] \arrow[uurr, dashed, bend right, "H"'] & & P^L_{\mathrm{B}_0}, \arrow[ul, "\pi_{P^L}"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $P\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, L *არის* K *სასრული* CW*-კომპლექსის ქვეკომპლექსი, ხოლო* $j:L\to K$ *ჩადგმის ასახვა, არსებობს* B_0*-ზე ფილერი* $H:(X,\circledR_X)\to(P^K,\circledR_{P^K})$.

ეს შედეგი თამაშობს არსებით როლს სადისერტაციო ნაშრომის თავი 1-ში და თავი 2-ში. თავი 1-ში აგრეთვე განმარტებული და გამოკვლეულია B_0-ზე ფიბრანტული სივრცეები.

განსაზღვრება 1.2.3. B_0*-ზე* $(Y,\circledR_Y)$ *სივრცეს ეწოდება* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცე, თუ ყოველი* B_0*-ზე* SSDR*-ასახვისთვის* $i:(A,\circledR_{X|A})\to(X,\circledR_X)$ *და ყოველი* B_0*-ზე*

$f:(A,\circledR_{X|A})\to(Y,\circledR_Y)$ *ასახვისათვის არსებობს ისეთი* B_0*-ზე* $F:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ *ასახვა, რომ* $F\cdot i=f$ *,ანუ კომუტაციურია შემდეგი დიაგრამა*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] \arrow[ddr, "f"'] & & X \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[ddl, "F"] \\ & \mathrm{B}_0 & \\ & Y \arrow[u, "\pi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

B_0-ზე ფიბრანტული სივრცეების კლასი არის საკმარისად ფართო. ის შეიცავს B_0-ზე აბსოლუტური მიდამოებრივი რეტრაქტების კლასს (თეორემა 1.2.4) .

გარდა ამ შედეგისა, აქ დამტკიცებულია, თუ $(Y,\circledR_Y)$ არის B_0-ზე ფიბრანტული სივრცე და K არის კომპაქტური მეტრიკული სივრცე, მაშინ $(Y^K_{\mathrm{B}_0},\circledR_{Y^K_{\mathrm{B}_0}})$ აგრეთვე არის B_0-ზე ფიბრანტული სივრცე (თეორემა 1.2.3).

თავი 1-ის შედეგები შეჯამებულია წინადადებებში, რომლებიც სისტემატურად გამოიყენება სადისერტაციო ნაშრომის შემდეგ ნაწილებში.

თეორემა 1.2.6. *ვთქვათ,* $\mathbf{Y}=((Y_n,\circledR_{Y_n}),p_{n,n+1},N^+)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცეების და ფიბრაციების შებრუნებული სისტემა. მაშინ* $Y=\varprojlim\mathbf{Y}$ *ფიბრული ზღვრული სივრცე არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცე და* $p_n:(Y,\circledR_Y)\to(Y_n,\circledR_{Y_n})$ *ბუნებრივი პროექციები არის* B_0*-ზე ფიბრაციები.*

თეორემა 1.2.7. *ვთქვათ,* $f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ *არის* B_0*-ზე ასახვა. თუ* $(X,\circledR_X),(Y,\circledR_Y)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, *მაშინ* $\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$.

თეორემა 1.2.8. *ვთქვათ,* $f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტულ სივრცეებს შორის* B_0 *-ზე ასახვა. მაშინ* B_0*-ზე კოცილინდრი* $\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცე.*

თავი 2-ის პარაგრაფი 2.1 იწყება B_0-ზე $\mathbf{X}=\{X_n,\circledR_{X_n},q_n^{n+1},N^+\}$ შებრუნებული მიმდევრობის ფიბრული კოტელესკოპის განმარტებით.

აქ მოცემული, მისი აგების დეტალური აღწერა საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ შემდეგი მთავარი თეორემა.

თეორემა 2.1.1. *ვთქვათ* $\mathbf{X}=\{(X_n,®_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცეების და ასახვების შებრუნებული სისტემა. მაშინ* $\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *კოტელესკოპი არის ფიბრანტული სივრცე* B_0*-ზე. თუ* $\mathbf{X}$ *შებრუნებული სისტემის ყოველი* $(X_n,®_{X_n})$ *წევრი არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცე,მაშინ* $\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *აგრეთვე არის ფიბრანტული სივრცე* B_0*-ზე.*

არსებობს ერთადერთი ბუნებრივი B_0-ზე ჩადგმა $i_{\mathbf{q}}:(X,®_X)\to(\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}),®_{\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})})$ ისეთი, რომ ყოველი $n\geq 0$ მთელი რიცხვისთვის სრულდება ტოლობა $\tilde{q}_n\, i_{\mathbf{q}}=i_n\, q_n$.

ფიბრული ძლიერი შეიპური კლასიფიკაციის განმარტების მიზნით სადისერტაციო ნაშრომში შემოთავაზებულია ფიბრული რეზოლვენტის ცნება, რომელიც წარმოადგენს ვ.ბალაძის მიერ $[\mathrm{B}_4]$-ში მოცემული ფიბრული რეზოლვენტის განმარტების კერძო შემთხვევას.

განსაზღვრება 2.1.2. $\mathbf{X}=\{(X_n,®_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *შებრუნებულ სისტემას ეწოდება* B_0*-ზე* $(X,®_X)$ *სივრცის* B_0*-ზე რეზოლვენტა, თუ*

a) $(X,®_X)=\underleftarrow{\lim}\mathbf{X}$;

b) $\mathbf{q}=\{q_n:(X,®_X)\to(X_n,®_{X_n})\}_{n\in N^+}$ *ოჯახი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:ყოველი* $n\in N^+$ *მთელი რიცხვისთვის და* $(X,®_X)$ *სივრცეში* $q_n(X)$ *ანასახის ყოველი* U *ღია მიდამოსთვის არსებობს ისეთი* $m\geq n$ *მთელი რიცხვი, რომ* $q_n^m(X_m)\subseteq U$.

თუ ყოველი $(X_n,®_{X_n})\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, *მაშინ* $\mathbf{q}$ *ერთობლიობას ეწოდება* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-რეზოლვენტა* B_0-ზე.

თავი 2-ში მიღებულ შედეგთა შორის ერთერთი მნიშვნელოვანია ფიბრული რეზოლვენტის არსებობის თეორემა.

თეორემა 2.1.3. B_0*-ზე ყოველი კომპაქტური მეტრიზებადი* $(X,®_X)$ *სივრცისთვის არსებობს* B_0*-ზე* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-რეზოლვენტა* $\mathbf{q}:(X,®_X)\to\mathbf{X}$.

ამ შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ კომპაქტური მეტრიკული $(X,®_X)$ სივრცის ყოველ ფიბრულ რეზოლვენტას შეესაბამება $(X,®_X)$-ის ფიბრული ფიბრანტული გაფართოება, წოდებული ამ ფიბრული რეზოლვენტის ფიბრულ კოტელესკოპად.

შემდეგი შედეგი თამაშობს არსებით როლს სადისერტაციო ნაშრომის შემდეგ ნაწილში ჩატარებულ კონსტრუქციებში.

თეორემა 2.1.4. *ვთქვათ,* $(X,®_X)$ *არის კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე* B_0*-ზე. თუ* $\mathbf{q}:(X,®_X)\to\mathbf{X}=\{(X_n,®_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *არის* $(X,®_X)$ *-ის რეზოლვენტა* B_0*-ზე, მაშინ არსებობს უსასრულო ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია*

$$D:\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})\times[0,\infty)\to\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$$

$\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *-დან* $\mathbf{i_q}(X)$*-ზე. კერძოდ,* $\mathbf{i_q}:(X,®_X)\to\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *ასახვა არის* SSDR*-ასახვა* B_0*-ზე.*

თეორემა 2.1.1-ის, თეორემა 2.1.3-ისა და თეორემა 2.1.4-ის ეფექტს ნათლად გამოხატავს შემდეგი შედეგი. ვთქვათ, $\tilde{X}=\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$.

თეორემა 2.1.5. *ყოველი* B_0*-ზე* $(X,®_X)$ *კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცისთვის არსებობს* B_0*-ზე ფიბრანტული გაფართოება* $i_X:(X,®_X)\to(\tilde{X},®_{\tilde{X}})$*. კერძოდ, თუ* $\mathbf{q}:(X,®_X)\to\mathbf{X}=\{(X_n,®_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-რეზოლვენტა* B_0*-ზე, მაშინ*

$$\mathbf{i_q}:(X,®_X)\to(\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}),®_{\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})})$$

ჩადგმა არის ფიბრანტული გაფართოება B_0*-ზე.*

დისერტაციაში მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიით ინდუცირებული სივრცეთა კლასიფიკაცია არის უფრო უხეში, ვიდრე ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის მიერ ინდუცირებული სივრცეთა კლასიფიკაცია, მაგრამ არის უფრო სუსტი, ვიდრე ფიბრული შეიპური თეორიით ინდუცირებული სივრცეთა კლასიფიკაცია.

თავი 2-ის მთავარი მიზანია ფიქსირებული B_0 სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეებისთვის კოტელესკოპის და ფიბრანტული სივრცეების ფიბრული ვერსიების გამოყენებით ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის აგება.

აქ აგებული ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია არის B_0 სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების $\mathbf{H(CM_{B_0})}$ ფიბრული ჰომოტოპიის

კატეგორიიდან ფიბრული ფიბრანტული სივრცეების $\mathbf{H(F_{B_0})}$ ფიბრულ ჰომოტოპიის კატეგორიაში ფუნქტორ-რეფლექტორის სრული ანასახი.

თეორემები 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4 და 2.1.5 გვაძლევს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2.1.6. *ვთქვათ* $i_X:(X,\circledR_X)\to(\tilde{X},\circledR_{\tilde{X}})$ *არის* $(X,\circledR_X)\in ob(\mathbf{CM_{B_0}})$ *სივრცის ფიბრანტული გაფართოება* B_0*-ზე. მაშინ* $\mathbf{H(CM_{B_0})}$ *კატეგორიის* $[i_X]_{\mathrm{B}_0}:(X,\circledR_X)\to(\tilde{X},\circledR_{\tilde{X}})$ *მორფიზმი არის* $\mathbf{H(F_{B_0})}$*-რეფლექსია.*

$\{i_X:(X,\circledR_X)\to(\tilde{X},\circledR_{\tilde{X}})\}_{(X,\circledR_X)\in ob(\mathbf{H(CM_{B_0})})}$ ოჯახი ინდუცირებს $\mathbf{H(F_{B_0})}$-რეფლექტორს $\mathrm{R}:\mathbf{H(CM_{B_0})}\to\mathbf{H(F_{B_0})}$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\mathrm{R}((X,\circledR_X))=(\tilde{X},\circledR_{\tilde{X}}),(X,\circledR_X)\in ob(\mathbf{H(CM_{B_0})})$$

და აკმაყოფილებს პირობებს:

კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების ყოველი $f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვისათვის კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "{[i_X]_{\mathrm{B}_0}}"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "{[f]_{\mathrm{B}_0}}"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi_{\tilde{X}}"'] \arrow[dd, "R(f)"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
Y \arrow[rr, "{[i_Y]_{\mathrm{B}_0}}"'] \arrow[ur, "\pi_Y"'] & & \tilde{Y}. \arrow[ul, "\pi_{\tilde{Y}}"]
\end{tikzcd}$$

ყოველი B_0-ზე f ასახვისთვის არსებობს ისეთი ერთადერთი ფიბრული ჰომოტოპიური ასახვა $\tilde{f}:(\tilde{X},\circledR_{\tilde{X}})\to(\tilde{Y},\circledR_{\tilde{Y}})$, რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "f"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi_{\tilde{X}}"'] \arrow[dd, "\tilde{f}"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
Y \arrow[rr, "i_Y"'] \arrow[ur, "\pi_Y"'] & & \tilde{Y}. \arrow[ul, "\pi_{\tilde{Y}}"]
\end{tikzcd}$$

ამ შემთხვევაში $(i_X, i_Y): f \to \tilde{f}$ წყვილს ეწოდება ფენების შემნახველი f ასახვის B_0-ზე ფიბრანტული გაფართოება.

განსაზღვრება 2.1.7. B_0 *სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია* $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}$ არის $\mathrm{R}: \mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}}) \to \mathbf{H}(\mathbf{F}_{\mathbf{B_0}})$ რეფლექტორის სრული ანასახი.

ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორიის აგების თანახმად,

$$ob(\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}) = ob(\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}})),$$

ყოველი $(X, \circledR_X), (Y, \circledR_Y) \in ob(\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}}))$ B_0-ზე სივრცისთვის

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}}((X, \circledR_X), (Y, \circledR_Y)) = [(\tilde{X}, \circledR_{\tilde{X}}), (\tilde{Y}, \circledR_{\tilde{Y}})]_{\mathrm{B}_0}.$$

ფიბრული ძლიერი შეიპური ფუნქტორის განმარტების თანახმად, ყოველი $(X, \circledR_X) \in ob(\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}})$ ობიექტისთვის

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}((X, \circledR_X)) = (X, \circledR_X)$$

და ყოველი B_0-ზე $f:(X, \circledR_X) \to (Y, \circledR_Y)$ ასახვის B_0-ზე $(i_X, i_Y): f \to \tilde{f}:(\tilde{X}, \circledR_{\tilde{X}}) \to (\tilde{Y}, \circledR_{\tilde{Y}})$ ფიბრანტული გაფართოებისთვის

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}([f]_{\mathrm{B}_0}) = \mathrm{R}([f]_{\mathrm{B}_0}) = [\tilde{f}]_{\mathrm{B}_0}.$$

არსებობს კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}}) \arrow[rr, "\mathrm{R}"] \arrow[dr, "\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}"'] & & \mathbf{H}(\mathbf{F}_{\mathbf{B_0}}) \\
& \mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}. \arrow[ur, "\mathrm{J}_{\mathrm{R}}"'] &
\end{tikzcd}$$

ჯ.დიდაკისა და ს.ნოვაკის [Dy-N$_1$] მსგავსად თავი 2-ის პარაგრაფ 2.2-ში განმარტებულია ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.

განსაზღვრება 2.2.1. *ფენების შემნახველ* $f:(X, \circledR_X) \to (Y, \circledR_Y)$ *ასახვას ეწოდება ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა, თუ ყოველი* $(P, \circledR_P)$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცისთვის* $f^*:[Y, P]_{\mathrm{B}_0} \to [X, P]_{\mathrm{B}_0}$ *არის ბიექცია.* f *ფიბრულ შეიპურ ექვივალენტობას ეწოდება ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა, თუ ყოველი ორი* $g, h:(Y, \circledR_Y) \to (P, \circledR_P) \in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *ფენების*

შემნახველი ასახვისთვის $g\,f$ *და* $h\,f$ *ასახვების მაკავშირებელი* $H:(X\times I,®_{X\times I})\to(P,®_P)$ *ფიბრული ჰომოტოპია არის* $X\times\{0,1\}$ *-ის მიმართ ფიბრულად ჰომოტოპიური* H' $(f\times 1_I)$ *კომპოზიციისა, სადაც* $H':(Y\times I,®_{Y\times I})\to(P,®_P)$ *არის ფიბრული ჰომოტოპია* g *და* h *ასახვებს შორის.*

ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის ცნება არის ფრიად სასარგებლო და მარტივი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ობიექტი. ის აღმოჩნდა მოსახერხებელი იარაღი ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის კვლევისთვის.

ფენების შემნახველი $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ ასახვის ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრი $\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})$, ანუ უბრალოდ ორმაგი ასახვის ცილინდრი B_0-ზე, არის B_0-ზე $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})\times\mathrm{I}$ სივრცის $X\times I\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})\times\{0,1\}$ ქვესივრცე.

ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის მეშვეობით დახასიათებულია ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმები. პარაგრაფ 2.2-ში მოძებნილია ის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომელთა შესრულების შემთხვევაში B_0-ზე ასახვები არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები. ფიბრული ასახვების სივრცეთა თვისებების მეშვეობით დამტკიცებულია ერთერთი მთავარი

თეორემა 2.2.3. *ვთქვათ* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის* B_0 *-ზე ასახვა. ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

1). f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა* ;

2). B_0 *-ზე მოცემული* $(Z,®_Z)$ *სივრცის* B_0 *-ზე* $(X,®_X)$ *ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის, ყოველი* $g:(Z,®_Z)\to(P,®_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ B_0 *-ზე ასახვა გაგრძელებადია* $(Z\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *სივრცემდე და ყოველი* B_0 *-ზე ასახვა*

$$H:(Z\times I\cup\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\times I\cup\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(P,®_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$$

გაგრძელებადია $((Z\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I,®_{(Z\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})$ *სივრცემდე;*

3). თუ $(X,®_X)$ არის $(Z,®_Z)$ -ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,®_Z)\to(Z\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

და

$$j:(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to((Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I,®_{(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})$$

ფიბრული ჩადგმები არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები;

4). თუ $(X,®_X)$ არის $(Z,®_Z)$-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,®_Z)\to(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა;

5). თუ $(X,®_X)$ არის $(Z,®_Z)$-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,®_Z)\to(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა;

6). ფიბრული ჩადგმები $k:(X,®_X)\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *და* $l:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})$ *არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები*;

7). *ყოველი* B_0*-ზე ასახვა გაგრძელებადია* $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *სივრცემდე და ყოველი* B_0*-ზე ასახვა*

$$H:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$$

გაგრძელებადია $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})$ *სივრცემდე.*

თეორემა 2.2.3-დან მიიღება შემდეგი წინადადებები.

შედეგი 2.2.4. *ვთქვათ,* $(X,®_X)$ *არის* B_0*-ზე სივრცე და* $A\subset X$ *.* $i:(A,®_{X|A})\to(X,®_X)$ *ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* i *და*

$$j:(X\times\{0\}\cup A\times I\cup X\times\{1\},®_{X\times\{0\}\cup A\times I\cup X\times\{1\}})\to(X\times I,®_{X\times I})$$

ფიბრული ჩადგმები არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები.

შედეგი 2.2.5. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა, მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

შედეგი 2.2.6. *თუ* $g:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის ფიბრულად ჰომოტოპიური* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობის, მაშინ* g *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

შედეგი 2.2.7. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *და* $g:(Y,®_Y)\to(Z,®_Z)$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები. მაშინ* $g\,f:(X,®_X)\to(Z,®_Z)$ *კომპოზიცია არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

თეორემა 2.2.8. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *და* $g:(Y,®_Y)\to(Z,®_Z)$ *არის* B_0*-ზე ისეთი ასახვები, რომ* $g\,f$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა. თუ* f *და* g *ასახვებს შორის ერთერთი არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა, მაშინ ორივე* f *და* g *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები.*

შედეგი 2.2.9. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. თუ* $(X,®_X)$ *სივრცეს აქვს* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცის ფიბრული ჰომოტოპიური ტიპი, მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის მეშვეობით შესაძლებელია აღიწეროს $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის ფიბრული ძლიერი შეიპური იზომორფიზმები.

თეორემა 2.2.10. *ჩაკეტილი ფიბრული ჩადგმა* $i:(A,®_{X|A})\to(X,®_X)$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* i *არის* B_0*-ზე* SSDR *-ასახვა.*

თეორემა 2.2.11. *ვთქვათ* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის* B_0*-ზე კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეებს შორის ფენების შემნახველი ასახვა, ხოლო* $(i_X,i_Y):f\to\tilde{f}$ *არის* f *ასახვის ფიბრანტული გაფართოება* B_0*-ზე. მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\tilde{f}$ *არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა.*

შედეგი 2.2.12. B_0*-ზე კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეებს შორის ფენების შემნახველი ასახვა* f *არის 2.2.1 განმარტების თვალსაზრისით ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}([\mathrm{f}]_{\mathrm{B}_0})$ *არის* $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ *კატეგორიის იზომორფიზმი.*

სადისერტაციო ნაშრომის თავი 3-ში აგებულია და განვითარებულია ფიქსირებული მეტრიზებადი B_0 სივრცის მიმართ განხილული ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეების ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია. აქ განხილული მიდგომა წარმოადგენს მარდეშიჩ-ლისიცას მეთოდის განზოგადებას და ის მარდეშიჩის მიერ შემოტანილი რეზოლვენტის ნაცვლად იყენებს რეზოლვენტის ვ.ბალაძის ფიბრულ ვერსიას. ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია გვაძლევს B_0-ზე სივრცეების ისეთ კლასიფიკაციას, რომელიც არის უფრო სუსტი, ვიდრე ფიბრული ჰომოტოპიური თეორიის მიერ ინდუცირებული B_0-ზე სივრცეების კლასიფიკაცია, მაგრამ არის უფრო ძლიერი, ვიდრე ჩვეულებრივი ფიბრული შეიპური თეორიის მიერ წარმოქმნილი B_0-ზე სივრცეთა კლასიფიკაცია.

ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის აგება იყენებს ფიბრული ძლიერი ANR_{B_0}-გაფართოების ცნებას. B_0-ის მიმართ განხილული სივრცეების ფიბრული ძლიერი გაფართოება არის B_0-ზე სივრცეებიდან B_0-ზე სივრცეებისაგან შემდგარ შებრუნებულ სისტემებში $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმები, რომლებიც აკმაყოფილებს ვ.ბალაძის მიერ განმარტებული ANR_{B_0}-გაფართოების ფიბრული ჰომოტოპიური პირობების ძლიერ ვერსიას.

პარაგრაფ 3.1-ში დამტკიცებულია, რომ B_0-ზე სივრცეების ფიბრული რეზოლვენტები ინდუცირებს B_0-ზე სივრცეთა ფიბრულ ძლიერ გაფართოებებს. ფიბრული ძლიერი შეიპური $\mathbf{SSH_{B_0}}$ კატეგორიის აგებისას არსებითად გამოიყენება ეს შედეგი.

პარაგრაფ 3.1-ში მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ შემდეგი ცნებები და შედეგები.

ვთქვათ, $\mathcal{U} = \{U_{\sim}\}_{\sim \in A}$ არის B_0-ზე $(Y, \circledR_Y)$ სივრცის დაფარვა. ვიტყვით, რომ $f, g : (X, \circledR_X) \to (Y, \circledR_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვები არის $\mathcal{U}$-მახლობელი, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_{\sim} \in \mathcal{U}$ ელემენტი, რომ $f(x), g(x) \in U_{\sim}$. ასევე, ვიტყვით, რომ $H : (X \times I, \circledR_{X \times I}) \to (Y, \circledR_Y)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს f და g ასახვებს, არის $\mathcal{U}$-ფიბრული ჰომოტოპია, თუ ყოველი

$x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_{\sim} \in \mathcal{U}$ ელემენტი, რომ ნებისმიერი $t \in I$ რიცხვისთვის $H(x,t) \subseteq U_{\sim}$.

წინადადება 3.1.1. (შეადარე $[\mathrm{B}_5]$, წინადადება 7) *ვთქვათ,* $(Y,\circledR_Y)$ *არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *-სივრცე. მაშინ* $(Y,\circledR_Y)$ *სივრცის ყოველი* $\mathcal{U}$ *ღია დაფარვისთვის არსებობს* $(Y,\circledR_Y)$ *სივრცის ისეთი* $\mathcal{V}$ *ღია დაფარვა, რომ როცა ორი* $f,g:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ *ფენების შემნახველი ასახვა ნებისმიერ* $(X,\circledR_X)$ *ტოპოლოგიური სივრციდან* $(Y,\circledR_Y)$ *ტოპოლოგიურ სივრცეში არის* $\mathcal{V}$ *-მახლობელი, მაშინ არსებობს* f *და* g *ასახვების მაკავშირებელი ფენების შემნახველი* $\mathcal{U}$ *-ჰომოტოპია* $H:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y,\circledR_Y)$. *გარდა ამისა, თუ* $A\subseteq X$ *ქვესიმრავლისათვის* $f_{|A}=g_{|A}$, *მაშინ* H *არის ფენების შემნახველი ჰომოტოპია* A *ქვესივრცის მიმართ.*

განსაზღვრება 3.1.4.(ვ.ბალაძე, იხ. $[\mathrm{B}_4]$–$[\mathrm{B}_6]$). *ვთქვათ,* $(X,\circledR_X)$ *არის* B_0*-ზე სივრცე,* $\mathbf{X}=((X_{\sim},\circledR_{X_{\sim}}),p_{\sim\sim'},\mathscr{A})$ $\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}$ *კატეგორიის შებრუნებული სისტემა, ხოლო* $\mathbf{p}=(p_{\sim}):(X,\circledR_X)\to\mathbf{X}$ $\mathbf{pro-Top}_{\mathbf{B}_0}$ *კატეგორიის მორფიზმი.* $\mathbf{p}$ *მორფიზმს ეწოდება* B_0*-ზე* $(X,\circledR_X)$ *სივრცის ფიბრული გაფართოება, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*

$\mathsf{E}_{\mathrm{B}_0}1)$. *ყოველი* $(P,\circledR_P)$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცისთვის და* $f:(X,\circledR_X)\to(P,\circledR_P)$ *ფენების შემნახველი ასახვისთვის არსებობს ისეთი* $\sim\in\mathscr{A}$ *ინდექსი და ისეთი* $h:(X_{\sim},\circledR_{X_{\sim}})\to(P,\circledR_P)$ *ფენების შემნახველი ასახვა, რომ* $h\,p_{\sim}\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} f$.

$\mathrm{E}_{\mathrm{B}_0}2)$. *თუ* $f,f':(X_{\sim},\circledR_{X_{\sim}})\to(P,\circledR_P)$ *არის ფენების შემნახველი ასახვები,* $(P,\circledR_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *და* $f\,p_{\sim}\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} f'\,p_{\sim}$, *მაშინ არსებობს ისეთი* $\sim'\geq\sim$ *ინდექსი, რომ* $f\,p_{\sim\sim'}\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} f'\,p_{\sim\sim'}$.

განსაზღვრება 3.1.5. $\mathbf{p}:(X,\circledR_X)\to((X_{\sim},\circledR_{X_{\sim}}),p_{\sim\sim'},\mathscr{A})$ მორფიზმს ეწოდება B_0-ზე ძლიერი გაფართოება, თუ ის აკმაყოფილებს $\mathsf{E}_{\mathrm{B}_0}1)$ პირობას და შემდეგ პირობას:

$\mathsf{SE}_{\mathrm{B}_0}2)$. ვთქვათ, $(P,\circledR_P)$ არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე, $f_0,f_1:(X_{\sim},\circledR_{X_{\sim}})\to(P,\circledR_P)$, $\sim\in\mathscr{A}$ ფენების შემნახველი ასახვები, ხოლო $F:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(P,\circledR_P)$ ისეთი ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$S(x,0)=f_0\,p_{\sim}(x),\quad x\in X$$

და

$$S(x,1) = f_1 p_{\sim}(x), \quad x \in X$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\sim' \geq \sim$ ინდექსი და $H:(X_{\sim'} \times I, \circledR_{X_{\sim'} \times I}) \to (P, \circledR_P)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$H(x,0) = f_0 p_{\sim\sim'}(z), \quad z \in X_{\sim'}$$

$$H(x,1) = f_1 p_{\sim\sim'}(z), \quad z \in X_{\sim'}$$

$$H(p_{\sim'} \times 1_I) \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} S(\mathrm{rel}(X \times \partial I)).$$

ყოველი ძლიერი გაფართოება B_0-ზე არის გაფართოება B_0-ზე.

თუ ყოველი $X_{\sim} \in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, მაშინ $\mathbf{p}$ გაფართოებას B_0-ზე და ძლიერ გაფართოებას B_0-ზე ეწოდება $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-გაფართოება და ძლიერი $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-გაფართოება, შესაბამისად.

პარაგრაფ 3.1-ის ერთერთი მთავარი შედეგია შემდეგი

თეორემა 3.1.6. *ვთქვათ,* $(X, \circledR_X)$ *არის ტოპოლოგიური სივრცე* B_0*-ზე. მაშინ ყოველი* B_0*-ზე რეზოლვენტა* $\mathbf{p}:(X, \circledR_X) \to \mathbf{X}$ *ინდუცირებს* B_0*-ზე ძლიერ* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-გაფართოებას.*

შედეგი 3.1.7. *ყოველი* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-რეზოლვენტა* B_0*-ზე ინდუცირებს* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-გაფართოებას* B_0*-ზე.*

შედეგი 3.1.8. *ყოველი* $(X, \circledR_X)$ B_0*-ზე სივრცისთვის არსებობს კოსასრული ძლიერი* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-გაფართოება* B_0*-ზე.*

თეორემა 3.1.6-ის დამტკიცება მიმდინარეობს შემდეგი ლემების გამოყენებით.

ლემა 3.1.9. *ვთქვათ,* $(X, \circledR_X)$ *არის ტოპოლოგიური სივრცე მეტრიზებად* B_0*-სივრცეზე,* $(P, \circledR_P), (P', \circledR_{P'})$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცეები,* $f:(X, \circledR_X) \to (P', \circledR_{P'})$, $h_0, h_1 : (P', \circledR_{P'}) \to (P, \circledR_P)$ ფენების შენახველი ასახვები, ხოლო $S:(X \times I, \circledR_{X \times I}) \to (P, \circledR_P)$ ისეთი ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$S(x,0) = h_0 f(x), \quad x \in X$$

$$S(x,1) = h_1 f(x), \quad x \in X$$

მაშინ არსებობს ისეთი $(P'', \circledR_{P''})$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე, $f':(X, \circledR_X) \to (P'', \circledR_{P''})$, $h:(P'', \circledR_{P''}) \to (P', \circledR_{P'})$ ფენების შემნახველი ასახვები და $K:(P'' \times I, \circledR_{P'' \times I}) \to (P, \circledR_P)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$h\,f' = f,$$

$$K(z,0) = h_0 h(z), \quad z \in P'',$$

$$K(z,1) = h_1\, h(z), \quad z \in P'',$$

$$K\,(f' \times 1_I\,) = S\,.$$

ლემა 3.1.10. *ვთქვათ,* $\mathbf{p}:(X,®_X) \to \mathbf{X}$ *არის რეზოლვენტა* B_0*-ზე, ხოლო* $\sim, (P,®_P), f_0, f_1$ *და* S *შესაბამისად არის ისეთი ინდექსი,* B_0*-ზე სივრცე და ფენების შემნახველი ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებს* $\mathrm{SE}_{\mathrm{B}_0}$ 2) *პირობის მოთხოვნებს. მაშინ* $(P,®_P)$ *სივრცის ყოველი* $\mathcal{U}$ *ღია დაფარვისთვის არსებობს ისეთი* $\sim' \geq \sim$ *ინდექსი და ისეთი ფენების შემნახველი* $H:(X_{\sim'} \times I, ®_{X_{\sim'}\times I}) \to (P,®_P)$ *ჰომოტოპია, რომ*

$$H(y,0) = f_0\, p_{\sim\sim'}(y), \qquad y \in X_{\sim'}$$

$$H(y,1) = f_1\, p_{\sim\sim'}(y), \qquad y \in X_{\sim'}$$

$$(S, H(1 \times p_{\sim'})) \leq \mathcal{U}.$$

თავი 3-ის პარაგრაფ 3.2-ში აგებულია $\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული პროჰომოტოპიის კატეგორია. ამ კატეგორიის ობიექტებია მიმართულ კოსასრულ სიმრავლეზე მოცემული B_0-ზე ტოპოლოგიური სივრცეებისა და ფენების შემნახველი ასახვებისაგან შემდგარი შებრუნებული სისტემები, ხოლო მორფიზმები $f:\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიის $[f]:\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ კლასები.

არსებობს $\mathrm{C}:\mathbf{pro}-\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0} \to \mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ და $\mathrm{E}:\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0} \to \mathbf{pro}-\mathbf{HTop}_{\mathbf{B}_0}$ ფუნქტორები. $\mathrm{E}\cdot\mathrm{C}:\mathbf{pro}-\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0} \to \mathbf{pro}-\mathbf{HTop}_{\mathbf{B}_0}$ კომპოზიცია არის ფენების შემნახველი $\mathrm{H}:\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0} \to \mathbf{HTop}_{\mathbf{B}_0}$ ფიბრული ჰომოტოპიური ფუნქტორით ინდუცირებული ფუნქტორი.

$\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის ობიექტებია B_0-ზე ყველა შესაძლო ტოპოლოგიური სივრცეები,ხოლო $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის მორფიზმები განიმარტება შემდეგნაირად.

ვთქვათ, $\mathbf{p}:(X,®_X) \to \mathbf{X}$ და $\mathbf{q}:(Y,®_Y) \to \mathbf{Y}$ შესაბამისად არის $(X,®_X)$ და $(Y,®_Y)$ სივრცეების $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტები, ხოლო $[f]:\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ არის $\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის რაიმე მორფიზმი. ვთქვათ $\mathbf{p}':(X,®_X) \to \mathbf{X}'$, $\mathbf{q}':(Y,®_Y) \to \mathbf{Y}'$, $[f']:\mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ არის B_0-ზე

$(X, ®_X)$ და $(Y, ®_Y)$ სივრცეთა სხვა $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტები და $\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის მორფიზმი.

$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, [f])$ და $(\mathbf{p}', \mathbf{q}', [f'])$ სამეულებს ეწოდება ექვივალენტური, თუ $[f'][i] = [j][f]$, სადაც $[i]: \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ და $[j]: \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ არის $\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის იზომორფიზმები.

ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმი $\mathrm{F}: (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ არის $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, [f])$ სამეულის ექვივალენტობის კლასი განმარტებული ექვივალენტური მიმართების მიმართ.

$\mathrm{ssh}_{\mathrm{B}_0}((X, ®_X))$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $(X, ®_X)$ ტოპოლოგიური სივრცის ექვივალენტობის კლასი $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიაში და ვუწოდოთ $(X, ®_X)$ სივრცის ფიბრული ძლიერი შეიპი.

პარაგრაფ 3.2-ში აგებულია $\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}: \mathbf{HTop}_{\mathbf{B}_0} \to \mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ ფიბრული ძლიერი შეიპური ფუნქტორი და $\mathrm{S}: \mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0} \to \mathbf{SH}_{\mathbf{B}_0}$ ფუნქტორი ვ.ბალაძის ფიბრულ შეიპურ კატეგორიაში. დამტკიცებულია ერთერთი მთავარი შედეგი.

თეორემა 3.2.5. *კომუტაციურია შემდეგი დიაგრამა*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{SH}_{\mathbf{B}_0} \\ \mathbf{HTop}_{\mathbf{B}_0} \arrow[ur, "\mathrm{S}_{\mathrm{B}_0}"] \arrow[dr, "\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}"'] & \\ & \mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}, \arrow[uu, "\mathrm{S}"'] \end{tikzcd}$$

სადაც $\mathrm{S}_{\mathrm{B}_0}$ *არის ვ.ბალაძის ფიბრული შეიპური ფუნქტორი* $[\mathrm{B}_4]$.

შედეგი 3.2.6. *ვთქვათ* $(X, ®_X)$ *და* $(Y, ®_Y)$ *არის* B_0*-ზე ტოპოლოგიური სივრცეები. თუ* $\mathrm{ssh}_{\mathrm{B}_0}((X, ®_X)) = \mathrm{ssh}_{\mathrm{B}_0}((Y, ®_Y))$, *მაშინ* $\mathrm{sh}_{\mathrm{B}_0}((X, ®_X)) = \mathrm{sh}_{\mathrm{B}_0}((Y, ®_Y))$.

თავი 1

ფიბრაციული ძლიერი შეიპური დეფორმაციული რეტრაქტები და ფიბრანტული სივრცეები

თავი 1 ეძღვნება ფენოვანი ტოპოლოგიის მიმოხილვას, დაწყებულს საბაზისო თეორიით და გაგრძელებულს ფენოვანი ჰომოტოპიის თეორიის და ფენოვანი რეტრაქტების თეორიის რჩეული და სპეციალური საკითხებით. პირველი თავი აგრეთვე ეხება ბორსუკის ფიბრულ წყვილებს, ძლიერ შეიპურ დეფორმაციულ ასახვებს და ფიბრანტულ სივრცეებს.

1.0 ფენოვანი ტოპოლოგიური წინასიტყვაობების და დამხმარე ფაქტების შესახებ

ამ პარაგრაფში მოცემულია ძირითადი ცნებები და შედეგები, რომლებსაც შემდეგში ვიყენებთ.

ვთქვათ $\mathrm{R}: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ არის ფუნქტორი $\mathscr{K}$ კატეგორიიდან $\mathscr{L}$ კატეგორიაში. **fimR** არის R ფუნქტორის სრული ანასახი, ხოლო R ფუნქტორის ფაქტორიზაცია

$$\begin{tikzcd} \mathscr{K} \arrow[rr, "\mathrm{R}"] \arrow[dr, "\mathrm{E}"'] & & \mathscr{L} \\ & \mathbf{fimR}, \arrow[ur, "\mathrm{J}"'] & \end{tikzcd}$$

სადაც E იგივური ფუნქტორია $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტზე და J სრული ანასახი.

ვთქვათ $\mathscr{L}$ არის $\mathscr{P}$ კატეგორიის სრული ქვეკატეგორია. მაშინ $\mathrm{Mor}_{\mathscr{P}}(X,Y)$ სიმრავლის $^{2}: X \to Y$ ელემენტს $Y \in ob(\mathscr{L})$ ობიექტით ეწოდება X სივრცის $\mathscr{L}$ - რეფლექცია, თუ ყოველი $L \in ob(\mathscr{L})$ ობიქტისთვის $^{2\,\#}: \mathscr{L}(Y,L) \to \mathscr{P}(X,L)$ ფუნქცია

არის ბიექცია. ვთქვათ $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{P}$ არის $\mathscr{P}$ კატეგორიის ქვეკატეგორია და ვთქვათ $\{^{2}_{X} : X \to \mathrm{R}X\}_{X \in ob(\mathscr{K})}$ არის $\mathscr{L}$ -რეფლექციათა ოჯახი, სადაც R არის ფუნქცია $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტების სიმრავლიდან $\mathscr{L}$ კატეგორიის ობიექტების სიმრავლეში. ცხადია, რომ R ინდუცირებს $\mathrm{R} : \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ ფუნქტორს. განმარტების თანახმად, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, X)$ სიმრავლის ყოველი $f : A \to X$ ელემენტისთვის, $\mathrm{R}\,f$ არის მორფიზმი $\mathrm{R}f : \mathrm{R}A \to \mathrm{R}X$ ისეთი, რომ $(\mathrm{R}\,f) \cdot {}^{2}_{A} = {}^{2}_{X} \cdot f$. აგებულ ფუნქტორს ეწოდება $\mathscr{K}$ რეფლექტორი ან რეფლექცია $\mathscr{L}$ კატეგორიაში.

$\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველი ფიქსირებული B_0 ობიექტისთვის $\mathscr{K}_{\mathbf{B_0}}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ შემდეგი კატეგორია. $\mathscr{K}_{\mathbf{B_0}}$ კატეგორიის $(X, \circledR_X)$ ობიექტები შედგება $X \in ob(\mathscr{K})$ ობიექტისა და $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X, Y)$ სიმრავლის $\circledR_X : X \to B_0$ მორფიზმის წყვილისაგან, რომელსაც პროექცია ეწოდება.

$\mathscr{K}_{\mathbf{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმი არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის $f : X \to Y$ მორფიზმი შემდეგი თვისებით

$$\circledR_X = \circledR_Y \cdot f \ .$$

ამ მორფიზმებს ეწოდება B_0-ზე მორფიზმები.

Top, **M** და **CM** სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შესაბამისად ტოპოლოგიურ სივრცეთა, მეტრიზებად სივრცეთა და კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეთა კატეგორიები. ცხადია, მოცემული კატეგორიების ფიქსირებული B_0 ობიექტისთვის არსებობს $\mathbf{Top}_{\mathbf{Bo}}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{Bo}}$ და $\mathbf{CM}_{\mathbf{Bo}}$ კატეგორიები.

B_0-ზე მოცემული რომელიმე კატეგორიის ყოველი $(X, \circledR_X)$ ობიექტისთვის $(X \times Z, \circledR_{X \times Z})$, სადაც Z არის ტოპოლოგიური სივრცე და $\circledR_{X \times Z}$ არის პროექცია მოცემული

$$\circledR_{X \times Z}(x, z) = \circledR_X(x), (x, z) \in X \times Z$$

ფორმულით, არის B_0-ზე სივრცე. შევნიშნოთ, რომ $p_X : X \times Z \to X$ არის B_0-ზე ასახვა.

ვთქვათ Y^Z არის ფუნქციათა სივრცე კომპაქტური-ღია ტოპოლოგიით. განვიხილოთ Y^Z სივრცის $Y^Z_{\mathrm{B}_0}$ ქვესივრცე:

$$Y^{Z}_{\mathrm{B}_0} = \{ f \in Y^Z : ® _Y \cdot f = \mathrm{const} \}.$$

ვთქვათ $®_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}} : Y^Z_{\mathrm{B}_0} \to \mathrm{B}_0$ არის ასახვა მოცემული ფორმულით

$$®_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}}(f) = ®_Y(f(z)), z \in Z.$$

ცხადია, რომ $(Y^Z_{\mathrm{B}_0}, ®_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}})$ წყვილი არის B_0-ზე სივრცე.

ექსპონენციალური კანონის თანახმად არსებობს B_0-ზე ჰომეომორფიზმი

$$E : (Y, ®_Y)^{(X \times Z, ®_{X \times Z})} \to (Y^Z_{\mathrm{B}_0}, ®_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}})^{(X, ®_X)}$$

მოცემული

$$(E(H)(x))(z) = H(x,z), H : (X \times Z, ®_{X \times Z}) \to (Y, ®_Y), x \in X, z \in Z.$$

ფორმულით.

ვთქვათ $f, g : (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ არის B_0-ზე ასახვები და $I = [0,1]$. ფენობრივი ჰომოტოპია f და g ასახვებს შორის ეწოდება ისეთ B_0-ზე $H : (X \times I, ®_{X \times I}) \to (Y, ®_Y)$ ასახვას, რომ $H_0 = f$ და $H_1 = g$.

H ფიბრულ ჰომოტოპიას f და g ასახვებ შორის აღვნიშნავთ $H : f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} g$, და ასევე ვუწოდებთ B_0-ზე ჰომოტოპიას. f ფიბრული ასახვის ფიბრული ჰომოტოპიის კლასს აღვნიშნავთ $[f]_{\mathrm{B}_0}$ სიმბოლოთი. ყველა შესაძლო ფიბრული ჰომოტოპიის კლასების სიმრავლეს აღვნიშნავთ $[X, Y]_{\mathrm{B}_0}$ სიმბოლოთი. $\mathbf{H}(\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0})$, $\mathbf{H}(\mathbf{M}_{\mathbf{B}_0})$ და $\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B}_0})$ სიმბოლოებით შესაბამისად აღვნიშნავთ $\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{B}_0}$ და $\mathbf{CM}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიების ფიბრული ჰომოტოპიის კატეგორიებს.

ექსპონეციალური წესის თანახმად B_0-ზე ჰომოტოპია $H : (X \times I, ®_{X \times I}) \to (Y, ®_Y)$ ინდუცირებს B_0-ზე $E(H) : (X, ®_X) \to (Y^I_{\mathrm{B}_0}, ®_{Y^I_{\mathrm{B}_0}})$ ასახვას, სადაც $Y^I_{\mathrm{B}_0} = \{ f : I \to Y \mid ®_Y \cdot f = \mathrm{const} \}$ და $®_{Y^I_{\mathrm{B}_0}}$ არის ასახვა განსაზღვრული ფორმულით

$$®_{Y^I_{\mathrm{B}_0}}(f) = ®_Y(f(t)), t \in I, f \in Y^I_{\mathrm{B}_0}.$$

ახლა განვმარტოთ რამდენი ასახვა, რომლებსაც შემდეგში გამოვიყენებთ.

$\mu_0 : Y^I_{B_0} \to (Y, ®_Y)$ და $\mu_1 : Y^I_{B_0} \to (Y, ®_Y)$ არის ასახვები, რომლებიც შესაბამისად მოცემულია

$$\mu_0(¨) = ¨(0), \qquad ¨ \in Y^I_{B_0},$$

$$\mu_1(¨) = ¨(1), \qquad ¨ \in Y^I_{B_0},$$

ფორმულებით.

ყოველი $t \in I$ რიცხვისთვის არსებობს B_0-ზე ჩადგმის ასახვა $\pm_t : (X, ®_X) \to (X \times I, ®_{X \times I})$ მოცემული

$$\pm_t(x) = (x, t), \qquad x \in X$$

ფორმულით.

ვთქვათ $j : L \to K$ არის ასახვა. $j^* : P^K_{B_0} \to P^L_{B_0}$ არის B_0-ზე ასახვა მოცემული

$$j^*(u) = u \cdot j, \qquad u \in P^K_{B_0}.$$

ფორმულით.

არსებობს ფიბრული ჰომოტოპიური ფუნქტორი

$$\mathrm{H} : \mathbf{Top}_{\mathbf{B_0}} \to \mathbf{H}(\mathbf{Top}_{\mathbf{B_0}})$$

მოცემული

$$\mathrm{H}(f) = [f]_{B_0}, \qquad f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}_{\mathbf{B_0}}}(X, Y)$$

და

$$\mathrm{H}((\mathrm{X}, ®_{\mathrm{X}})) = (\mathrm{X}, ®_{\mathrm{X}}), \qquad (\mathrm{X}, ®_{\mathrm{X}}) \in \mathrm{ob}(\mathbf{Top}_{\mathbf{B_0}})$$

ფორმულებით.

ვთქვათ $A \subset X$ და $®_A = ®_{X|_A}$. B_0-ზე $r : (X, ®_X) \to (A, ®_A)$ ასახვა არის B_0-ზე ფენობრივი რეტრაქცია, თუ $r \cdot i = 1_A$ და, თუ დამატებით სრულდება, $i \cdot r \simeq_{B_0} 1_A$, მაშინ

r ეწოდება ფენობრივი დეფორმაციული რეტრაქცია ან B_0-ზე დეფორმაციული რეტრაქცია.

B_0-ზე X მეტრიკული სივრცის A ქვესივრცეს ეწოდება X-ის ფიბრული მიდამოებრივი რეტრაქტი თუ არსებობს A ქვესივრცის U ღია მიდამო X-ში და ფიბრული რეტრაქცია $r:U \to A$.

B_0-ზე $r:(X,®_X)\to(A,®_A)$ დეფორმაციულ რეტრაქციას ეწოდება B_0-ზე ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია ან B_0-ზე $\mathrm{SDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვა, თუ $i\cdot r \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} 1_X$ $\mathrm{rel}A$.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$, სადაც $(X,®_X)\subset(\mathrm{Cyl}(f),®_{\mathrm{Cyl(f)}})$ B_0-ზე სივრცეა, არის $\mathrm{Cyl(f)}$-ის B_0-ზე ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი.

ვთქვათ A არის B_0-ზე $(X,®_X)\in\mathbf{M}_{\mathbf{B_0}}$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ვიტყვით, რომ B_0-ზე $D:(X\times[0,+\infty),®_{X\times[0,+\infty)})\to(X,®_X)$ ასახვა არის უსასრულო ძლიერი დეფორმაციული $(X,®_X)$ სივრციდან $(A,®_{X|_A})$-ში, თუ ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის $D(x,0)=x$, ყოველი $a\in A, t\in[0,+\infty)$-თვის $D(a,t)=a$ და A სიმრავლის X სივრცეში ნებისმიერი U ღია მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $ª\in[0,+\infty)$ რიცხვი, რომ $D(X\times[ª,\infty))\subseteq U$.

აგრეთვე გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს. ვთქვათ B_0 არის ფიქსირებული მეტრიზებადი სივრცე. $(Y,®_Y)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B_0}})$ სივრცე არის B_0-ზე აბსოლუტური რეტრაქტი, $(Y,®_Y)\in\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$ (B_0-ზე აბსოლუტური მიდამოებრივი რეტრაქტი, $(Y,®_Y)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$), თუ $(Y,®_Y)$ სივრცეს აქვს შემდეგი თვისება: ყოველი $i:(Y,®_Y)\to(X,®_X)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B_0}})$ B_0-ზე ჩაკეტილი ჩადგმისთვის არსებობს ფიბრული რეტრაქცია $r:(X,®_X)\to(i(Y),®_{X|_{i(Y)}})$ ($i(Y)$ სივრცის U ღია მიდამო X-ში და ფენობრივი რეტრაქცია $r:(U,®_{X|U})\to(i(Y),®_{X|i(Y)})$).

$(Y,®_Y)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B_0}})$ სივრცე არის B_0-ზე აბსოლუტური ექსტენზორი, $Y\in \mathrm{AE}_{\mathrm{B}_0}$ (B_0-ზე აბსოლუტური მიდამოებრივი ექსტენზორი, $(Y,®_Y)\in \mathrm{ANE}_{\mathrm{B}_0}$), თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

ყოველი $(X,®_X)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B_0}})$ B_0-ზე სივრცისთვის და ნებისმიერი $A\subseteq X$ ჩაკეტილი სივრცისთვის, $f:(A,®_{X|A})\to(Y,®_Y)$ B_0-ზე ასახვას აქვს $\tilde{f}:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ B_0-ზე გაგრძელება ($\tilde{f}:(U,®_{X|U})\to(Y,®_Y)$, სადაც U არის A სივრცის ღია მიდამო X-ში).

შემდეგი შედეგები არის რეტრაქტების თეორიის შედეგების გარკვეული განზოგადოებები.

B_0-ზე მეტრიზებადი სივრცე არის $\mathrm{A(N)R}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არის $\mathrm{A(N)E}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე $[\mathrm{Y}_2]$.

ყოველი $(X,®_X)$ B_0-ზე მეტრიკული სივრცისთვის არსებობს ფენების შემნახველი ჩაკეტილი ჩადგმა $(M,®_M)$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცეში წონით $w(M)\leqslant max(w(X),w(\mathrm{B}_0),\aleph_0)$ $[\mathrm{B}_4]$.

Z კომპაქტური მეტრიზებადი სივრციდან Y $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცეში $\ddot{\ }:Z\to Y$ ასახვის სივრცე $Y^Z_{\mathrm{B}_0}$, კომპაქტური-ღია ტოპოლოგიით და $®_Y\cdot\ddot{\ }=\mathrm{const}$ თვისებით, არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე $[\mathrm{B}_4]$.

ვთქვათ $(Y,®_Y)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ და $A\subset X$ არის $(X,®_X)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B_0}})$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. ვთქვათ $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ არის B_0-ზე ასახვა, ხოლო $H:(A\times I,®_{X\times I|_{A\times I}})\to(Y,®_Y)$ არის $f_{|A}$ ასახვის ჰომოტოპია B_0-ზე. მაშინ არსებობს $\tilde{H}$-ის გაგრძელება f-ის თავისთავში B_0-ზე ჰომოტოპიამდე $[\mathrm{Y}_2]$.

გარდა ამისა, $[\mathrm{Y}_2]$-ში მოცემული მსგავსი შედეგი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

ვთქვათ $f,g:(X,®_X)\to(Y,®_Y)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ არის B_0-ზე მეტრიკული სივრციდან B_0-ზე ასახვები და ვთქვათ $H:(A\times I,®_{A\times I})\to(Y,®_Y)$ არის X სივრცის A ქვესივრცეზე f და g ასახვების შემოსაზღვრებს შორის B_0-ზე ჰომოტოპია. მაშინ X სივრცეში არსებობს A-

ს იაეთი U ღია მიდამო და $f_{|U}$ და $g_{|U}$ შემოსაზღვრის ასახვებს შორის B_0-ზე ჰომოტოპია $\tilde{H}:(U\times I, ®_{X\times I|U\times I})\to(Y, ®_Y)$, რომ $\tilde{H}_{|A\times I}=H$.

$i:(A, ®_A)\to(X, ®_X)$ B_0-ზე ასახვას ეწოდება B_0-ზე კოფიბრაცია ყოველი კომუტაციური დიგრამისათვის

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_A"] \arrow[dd, "i"'] & & Y^I_{\mathrm{B}_0} \arrow[dl, "\pi_{Y^I_{\mathrm{B}_0}}"'] \arrow[dd, "\omega_0"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
X \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[rr, "\bar{f}"'] \arrow[uurr, dashed, bend right, "\bar{F}"] & & Y, \arrow[ul, "\pi_Y"']
\end{tikzcd}$$

სადაც ყოველი ასახვა არის B_0-ზე ასახვა და $μ_0\cdot F=\bar{f}\cdot i$, არსებობს B_0-ზე ისეთი $\bar{F}:(X: ®_X)\to(Y^I_{\mathrm{B}_0}, ®_{Y^I_{\mathrm{B}_0}})$ ასახვა, რომ $F=\bar{F}\cdot i$ და $μ_0\cdot\bar{F}=\bar{f}$.

$p:(E, ®_E)\to(B, ®_B)$ B_0-ზე ასახვას ეწოდება B_0-ზე ფიბრაცია, თუ ყოველი კომუტაციური დიაგრამისათვის

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "\sigma_0"'] & & E \arrow[dl, "\pi_E"'] \arrow[dd, "p"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
X\times I \arrow[ur, "\pi_{X\times I}"] \arrow[rr, "F"'] \arrow[uurr, dashed, bend right, "\bar{F}"] & & B, \arrow[ul, "\pi_B"']
\end{tikzcd}$$

სადაც თითოეული ასახვა არის B_0-ზე ასახვა და $p\cdot\bar{f}=F\cdot ±_0$, არსებობს ისეთი B_0-ზე $\bar{F}:(X\times I, ®_{X\times I})\to(E, ®_E)$ ასახვა, რომ $F=p\cdot\bar{F}$ და $\bar{F}\cdot ±_0=\bar{f}$.

B_0-ზე $f:(X, ®_X)\to(Y, ®_Y)$ ასახვის ცილინდრი $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})$ შედგება $f:X\to Y$ ასახვის $\mathrm{Cyl}(\mathrm{f})$ ცილინდრისაგან და $®_{\mathrm{Cyl}(\mathrm{f})}:\mathrm{Cyl}(\mathrm{f})\to\mathrm{B}$ პროექციისაგან, რომელიც მოიცემა შემდეგი ფორმულებით

$$®_{\mathrm{Cyl}(\mathrm{f})}([x,t])=®_X(x), [x,t]\in\mathrm{Cyl}(\mathrm{f}),$$

$$®_{\mathrm{Cyl}(\mathrm{f})}(y)=®_Y(y), y\in Y\subset\mathrm{Cyl}(\mathrm{f}).$$

არსებობს კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\sigma_1"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "f"'] & & X \times I \arrow[dl, "\pi_{X\times I}"'] \arrow[dd, "f^{\#}"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
Y \arrow[rr, "(\sigma_1)_f"'] \arrow[ur, "\pi_Y"] & & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[ul, "\pi_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $\pm_1, (\pm_1)_f$ და $f^{\#}$ არის ასახვები მოცემული შემდეგი ფორმულებით

$$\pm_1(x) = (x,1), \qquad x \in X,$$
$$(\pm_1)_f(y) = [y], \qquad y \in Y,$$
$$f^{\#}((x,t)) = [x,t], \qquad (x,t) \in X \times I.$$

ვთქვათ $j:(\mathrm{Cyl}(f), ®_{\mathrm{Cyl(f)}}) \to (Y \times I, ®_{Y\times I})$ არის B_0-ზე ასახვა განსაზღვრული შემდეგნაირად

$$j[(x,t)] = (f(x),t), \qquad (x,t) \in X \times I,$$

$$j(y) = (y,0), \qquad y \in Y.$$

ადვილი დასანახია, რომ B_0-ზე $i:(X, ®_X) \to (\mathrm{Cyl}(f), ®_{\mathrm{Cyl}(f)})$ ასახვა არის B_0-ზე კოფიბრაცია და B_0-ზე რეტრაქცია $r:(\mathrm{Cyl}(f), ®_{\mathrm{Cyl}(f)}) \to (Y, ®_Y)$ მოცემული ფორმულებით

$$r([x,t]) = [x,1], \qquad [x,t] \in \mathrm{Cyl(f)},$$

$$r(y) = y, \qquad y \in Y \subset \mathrm{Cyl(f)}.$$

არის ფენობრივი ჰომოტოპიური ექვივალენტობა.

B_0-ზე $f:(X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ არის B_0-ზე კოფიბრაცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B_0-ზე j ასახვა რეტრაქტირებადი ასახვაა, ე.ი. არსებობს B_0-ზე $r:(X \times I, ®_{X\times I}) \to (\mathrm{Cyl}(f), ®_{\mathrm{Cyl(f)}})$ რეტრაქცია .

B_0-ზე $f:(X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ ასახვის B_0-ზე კოცილინდრი, აღინიშნება $\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ სიმბოლოთი, არის $\mathrm{coCyl}(f)$ კოცილინდრის ქვესივრცე, რომელიც შედგება (u,x)

წყვილისაგან, სადაც $u \in Y^I_{B_0}$, $x \in X$ და $u(1) = f(x)$, ე.ი. $\circledR_Y \cdot u = \mathrm{const}$. $\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)$ ქვესივრცე არის B_0-ზე სივრცე $\circledR_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)} : \mathrm{coCyl}_{B_0}(f) \to B_0$ პროექციით, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\circledR_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)}(u, x) = \circledR_Y(f(x)), (u, x) \in \mathrm{coCyl}_{B_0}(f).$$

არსებობს კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{coCyl}_{B_0}(f) \arrow[rr, "\omega_1^{\#}"] \arrow[dd, "f_{\omega_1}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)}"] & & X \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dd, "f"] \\
& B_0 & \\
Y^I_{B_0} \arrow[rr, "\omega_1"'] \arrow[ur, "\pi_{Y^I_{B_0}}"] & & Y, \arrow[ul, "\pi_Y"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $\mu_1^{\#}$, f_{μ_1} და μ_1 არის ასახვები, რომლებიც განმარტებულია შემდეგნაირად

$$\mu_1^{\#}(u, x) = x, \qquad (u, x) \in \mathrm{coCyl}_{B_0}(f),$$

$$f_{\mu_1}(u, x) = u, \qquad (u, x) \in \mathrm{coCyl}_{B_0}(f),$$

$$\mu_1(u) = u(1), \qquad u \in Y^I_{B_0}.$$

ვთქვათ $p : \mathrm{coCyl}_{B_0}(f) \to Y$ არის ასახვა მოცემული შემდეგნაირად

$$p(u, x) = u(0), \qquad (u, x) \in \mathrm{coCyl}_{B_0}(f).$$

ცხადია, რომ p არის B_0-ზე ასახვა და

$$p = \mu_0 \cdot f_{\mu_1}.$$

შევნიშნოთ, რომ $p : (\mathrm{coCyl}_{B_0}(f), \circledR_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)}) \to (Y, \circledR_Y)$ არის B_0-ზე ფიბრაცია.

ვთქვათ $0_y : I \to Y$ არის მუდმივი ასახვა $y \in Y$ წერტილში. $(0_{f(x)}, x)$ წყვილი ეკუთვნის $\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)$ რადგან $0_{f(x)}(1) = f(x)$.

ვთქვათ $i : X \to \mathrm{coCyl}_{B_0}(f)$ არის ასახვა მოცემული შემდეგი ფორმულით

$$i(x) = (0_{f(x)}, x), \qquad x \in X.$$

ახლა განმარტოთ $r:\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\to X$ ასახვა შემდეგნაირად

$$r(u,x)=x, \qquad (u,x)\in \mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f).$$

მაშინ $r\cdot i=1_X$ და $i\cdot r\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}1_X$. აქედან გამომდინარე, X არის ჩადგმადი $\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ კოცილინდრში და არის $\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$-ის B_0-ზე ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი. ამიტომ, i არის B_0-ზე ჰომოტოპიური ექვივალენტობა და არსებობს ფაქტორიზაცია

$$\begin{tikzcd}
(X,\pi_X) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & (Y,\pi_Y) \\
& \mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f), \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

ე.ი. $f=p\cdot i$. მართლაც,

$$f(x)=0_{f(x)}(0)=p(0_{f(x)},x)=(p\cdot i)(x).$$

B_0-ზე ასახვა $r:(\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})})\to(X,®_X)$ არის B_0-ზე დახურული ფიბრაცია $i:(X,®_X)\to(\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})})$-ის მიმართ, თუ

$$r\cdot i=1_X$$

და

$$i\cdot r\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}1_{\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})}\,\mathrm{rel}\,i(X)\ .$$

ადვილი დასანახია, რომ B_0-ზე ასახვების ჩაკეტილ დიაგრამაში

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "\pi_{E'}"] \arrow[dd, bend right, "q'"'] & & E \arrow[dl, "\pi_E"'] \arrow[dd, "q"'] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
B' \arrow[rr, "f"'] \arrow[ur, "\pi_{B'}"] \arrow[uu, dashed, "i'"'] & & B \arrow[ul, "\pi_B"'] \arrow[uu, bend right, "i"']
\end{tikzcd}$$

თუ q არის B_0-ზე დახურული ფიბრაცია $i:(B,®_B)\to(E,®_E)$ ასახვის მიმართ, მაშინ q' ასევე არის B_0-ზე დახურული ფიბრაცია ცალსახად განსაზღვრული ისეთი B_0-ზე $i':(B',®_{B'})\to(E',®_{E'})$ ჩადგმის მიმართ, რომ

$$f'\cdot i'=i\cdot f\ .$$

1.1 ფიბრული ბორსუკის წყვილები

(X,A) წყვილს, რომელიც შედგება B_0-ზე $(X,\circledR_X)$ სივრცისაგან და $A\subset X$ ქვესივრცისაგან, ეწოდება ბორსუკის წყვილი B_0-ზე, თუ $i:(A,\circledR_{X|_A})\to(X,\circledR_X)$ B_0-ზე ჩადგმა არის B_0-ზე კოფიბრაცია. შევნიშნოთ, რომ (X,A) ჩაკეტილი წყვილი არის ბორსუკის ჩაკეტილი წყვილი B_0-ზე, თუ $X\times 0\cup A\times I$ არის $X\times I$ ნამრავლის B_0-ზე რეტრაქტი.

თავდაპირველად დავამტკიცოთ ზოგიერთი წინადადება B_0-ზე კოფიბრაციებისა და ბორსუკის B_0-ზე წყვილების შესახებ.

თეორემა 2.1. *B_0-ზე ასახვა $i:(A,\circledR_A)\to(X,\circledR_X)$ არის კოფიბრაცია B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B_0-ზე $j:(\mathrm{Cyl}(i),\circledR_{\mathrm{Cyl}(i)})\to(X\times I,\circledR_{X\times I})$ ასახვა არის რეტრაქტირებადი.*

დამტკიცება: ვთქვათ $F:(A\times I,\circledR_{A\times I})\to(Y,\circledR_Y)$ არის B_0-ზე ჰომოტოპია და $f_0=F\cdot\pm_0$. განვიხილოთ f_0 ასახვის B_0-ზე გაგრძელება

$$\bar f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y).$$

F და $\bar f$ B_0-ზე ასახვები ინდუცირებს ისეთ $g:\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{i})\to\mathrm{Y}$ B_0-ზე ასახვას, რომ

$$g([a,t])=F(a,t),\qquad [(a,t)]\in\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{i}),$$

$$g(x)=\bar f(x),\qquad x\in\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f}).$$

$(F,\bar f)$ წყვილი არის კონუსი $(\pm_0,i)$-ზე. ცხადია, რომ g არის მორფიზმი $(i_\#,(\pm_0)_i)$ კონუსიდან $(F,\bar f)$ კონუსში. აქედან გამომდინარე, თუ არსებობს B_0-ზე რეტრაქცია

$$r:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(i),\circledR_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{i})}),$$

მაშინ

$$\bar F=g\cdot r:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y,\circledR_Y)$$

კომპოზიცია არის B_0-ზე f ასახვის B_0-ზე ჰომოტოპია რადგან

$$\bar{F}\cdot j = g$$

და

$$\bar{F}(x,0) = (\bar{F}\cdot j)(x) = g(x) = \bar{f}(x), \qquad x \in X.$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $(a,t) \in (A\times I, ®_{A\times I})$ წყვილისთვის

$$\bar{F}((i(a),t)) = (\bar{F}\cdot j)([(a,t)]) = g[(a,t)] = F((a,t)) \; .$$

ცხადია, თუ B_0-ზე ასახვა j არის რეტრაქტირებადი, მაშინ B_0-ზე ასახვა i არის კოფიბრაცია.

ახლა ვთქვათ შებრუნებით, დავუშვათ B_0-ზე ასახვა $i:(A,®_A)\to(X,®_X)$ არის B_0-ზე კოფიბრაცია. მაშინ არსებობს ისეთი B_0-ზე რეტრაქცია

$$r:(X\times I, ®_{X\times I}) \to (\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(i), ®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{i})})$$

რომ

$$r((x,0)) = x, (x,0)\in X\times I,$$

$$r(i(a),t) = [(a,t)], a\in A, t\in I.$$

აქედან გამომდინარე, r არის j-ს რეტრაქცია. □

შედეგი 2.2. *B_0-ზე X სივრცის და მისი ჩაკეტილი A ქვესივრცის (X,A) წყვილი არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(X\times\{0\})\cup(A\times I)\subset X\times I$ არის $X\times I$ -ის რეტრაქტი B_0 -ზე.* □

შედეგი 2.3. *ყოველი (X,A) ჩაკეტილი ბორსუკის წყვილისათვის B_0-ზე და ყოველი B_0-ზე Y სივრცისთვის $(X\times Y, A\times Y)$ არის ბორსუკის ჩაკეტილი წყვილი B_0-ზე.* □

შედეგი 2.4. *თუ (X,A) არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე და A არის X ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ ყოველი B_0-ზე Y სივრცისთვის $i^*:Y^X\to Y^A$ ასახვა არის B_0-ზე კოფიბრაცია.* □

თეორემა 2.5. *B_0-ზე $(X,®_X)$ სივრცის და მისი ჩაკეტილი $(A,®_{X|A})$ ქვესივრცის (X,A) წყვილი არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი*

$\cdot : X \to I$ *ასახვა და* A *-ს მიმართ* $G:(X \times I, ®_{X\times I}) \to (X, ®_X)$ *ფიბრული ჰომოტოპია, რომ* $A = \cdot^{-1}(0)$, $G(x,0)=x$ *და* $\cdot(x)<t$ *მნიშვნელობისთვის* $G(x,t)\in A$.

დამტკიცება: ვთქვათ (X,A) არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე. შედეგი 2.2-ის თანახმად არსებობს B_0-ზე რეტრაქცია

$$r: X\times I \to \tilde{A} = (X\times\{0\})\cup(A\times I) .$$

ვთქვათ $r((x,t)) = (\overline{r}(x,t), °(x,t))$, სადაც $\overline{r}(x,t)\in X$ არის $r(x,t)$-ის პირველი კოორდინატი და $°(x,t)\in I$ არის პროექცია $r(x,t)$ წერტილის I-ში.

ვთქვათ $\cdot : X\to I$ არის ფუნქცია მოცემული

$$\cdot(x) = \max\{t - °(x,t) \mid x\in X\}.$$

ფორმულით.

შევნიშნოთ, რომ $A=\cdot^{-1}(0)$. გარდა ამისა, თუ $\cdot(x)<t$, მაშინ $°(x,t)>0$ და აქედან გამომდინარე, $\overline{r}(x,t)\in A$.

ახლა ვთქვათ $G=\overline{r}:(X\times I, ®_{X\times I})\to(X, ®_X)$. ცხადია, რომ ყოველი $\cdot(x)<t$

$$G(x,0)=\overline{r}(x,0)=x\ ,\quad G(x,t)\in A$$

და

$$®_X(x) = ®_{X\times I}(x,t) = ®_{\tilde{A}}(\overline{r}(x,t), °(x,t)) = ®_X(\overline{r}(x,t)),$$

ე.ი. $\overline{r}$ არის B_0-ზე ასახვა.

ახლა დავუშვათ შებრუნებით, ვთქვათ სამართლიანია თეორემის პირობა. მაშინ $r:(X\times I, ®_{X\times I})\to(X, ®_X)$ ასახვა მოცემული

$$r(x,t) = \begin{cases} (G(x,t),0), & t\le \cdot(x) \\ (G(x,t), t-\cdot(x)), & t\ge\cdot(x). \end{cases}$$

ფორმულით არის B_0-ზე რეტრაქცია. აქედან გამომდინარე, (X,A) არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე. □

თეორემა 2.6. *ვთქვათ* (X,A) *არის ბორსუკის წყვილი* B_0 *-ზე. მაშინ*

$$(X\times I,(X\times\{0\})\cup(A\times I)\cup X\times\{1\})$$

არის ბორსუკის წყვილი B_0 *-ზე.*

დამტკიცება: სიმარტივისათვის X_A სიმბოლოთი აღვნიშნოთ

$$(X\times\{0\})\cup(A\times I)\cup X\times\{1\})$$

სიმრავლე. თეორემა 2.5-ის თანახმად არსებობს $¨ : X\to I$ ფუნქცია და ისეთი B_0-ზე ჰომოტოპია

$$g_t : U\to X \ \mathrm{relA}$$

$U = X\diagdown ¨^{-1}(0)$-დან X-ში, რომ $¨^{-1}(0)=A$, $g_0(x)=x$ და ყოველი $x\in U$ წერტილისთვის $g_1(x)\in A$.

$· : X\times I\to I$ ფუნქციას განსაზღვრული

$$·(x,t)=2\min(2¨(x),²,1-²),\qquad (x,²)\in X\times I$$

ფორმულით აქვს შემდეგი თვისება $·^{-1}(0)=X_A$.

ვთქვათ $V = X\times I\diagdown ·^{-1}(1)$ არის $(x,²)\in X\times I$ წერტილებისაგან შედგენილი სიმრავლე, ყოველი $² \neq \frac{1}{2}$ ან $·(x)=\frac{1}{4}$.

$h_t : V\to V\times I$ ასახვებს მოცემული შემდეგი ფორმულებით

$$h_t(x,\tau)=\begin{cases}(x,\tau(1-t)), & 2\tau\le\varphi(x);\\ (g(x,(\frac{2t}{\varphi(x)}-1)t),\tau(1-t)), & \varphi(x)\le 2\tau\le\min(2\varphi(x),1);\\ (g(x,t),(\tau-2\varphi(x))t+\tau), & \varphi(x)\le\tau\le\min(2\varphi(x),\frac{1}{2});\\ (g(x,t),\tau), & 2\varphi(x)\le\tau\le 1-2\varphi(x);\\ (g(x,t),\tau+(2\varphi(x)+\tau-1)t), & \max(1-2\varphi(x),\frac{1}{2})\le\tau\le 1-\varphi(x);\\ (g(x,(\frac{2(1-\tau)}{\varphi(x)}-1)t),\tau+t-\tau t), & \max(2(1-\varphi(x)),1)\le 2\tau\le 2-\varphi(x);\\ (x,\tau+t-\tau t), & 2-\varphi(x)\le 2\tau\end{cases}$$

აქვს შემდეგი თვისებები

$$h_0(x,{}^2)=(x,{}^2),h_1(x,{}^2)\in X_A,(x,{}^2)\in X\times I$$

და

$$h_t(x,{}^2)=(x,{}^2),(x,{}^2)\in X_A.$$

აქედან გამომდინარე, $(X\times I,(X\times\{0\})\cup(A\times I)\cup(X\times\{1\}))$ არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე.

თეორემა 2.7. *ვთქვათ (X,A) არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე. მაშინ B_0-ზე რეტრაქცია $r:(X,\circledR_X)\to(A,\circledR_{X|A})$ არის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია B_0-ზე.*

დამტკიცება: ვთქვათ $F:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(X,\circledR_X)$ არის B_0-ზე ჰომოტოპია $i\cdot r:(X,\circledR_X)\to(X,\circledR_X)$ და $1_X:(X,\circledR_X)\to(X,\circledR_X)$ ასახვებს შორის. თეორემა 2.6-ის თანახმად $(X\times I,X_A)$ წყვილი არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე.

ამრიგად, არსებობს B_0-ზე ჰომოტოპია მოცემული ფორმულით

$$F_{{}^2}(x,t)=\begin{cases}F((i\cdot r)(x),{}^2), & t=0,\\ F(x,t+(1-t)^2), & x\in A,t\in I,\\ x, & t=1.\end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ $F_0(x,t)=F(x,t)$ და $F_1:X\times I\to X\,\mathrm{rel}A$ არის B_0-ზე ჰომოტოპია 1_X და $i\cdot r$ ასახვებს შორის. □

თეორემა 2.8. B_0*-ზე სივრცეების ჩაკეტილი (X,A) წყვილი არის ბორსუკის წყვილი* B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\tilde{A}=(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ *არის $(X\times I,\circledR_{X\times I})$-ის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი* B_0*-ზე.*

დამტკიცება: ვთქვათ $(\tilde{A},®_{\tilde{A}})$ არის $(X\times I,®_{X\times I})$ სივრცის B_0-ზე ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი. შედეგი 2.2-ის თანახმად (X,A) წყვილი არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე.

აქედან გამომდინარე, როგორც ნამრავლი $(X\times I,®_{X\times I})$ არის დეფორმირებადი $X\times\{0\}$-ში და ასევე, $\tilde{A}$-ში, შედეგი 2.2-ის თანახმად არსებობს B_0-ზე რეტრაქცია

$$r:(X\times I,®_{X\times I})\to(\tilde{A},®_{\tilde{A}})\ .$$

ეს რეტრაქცია არის B_0-ზე დეფორმაციული რეტრაქცია. თეორემა 2.7-ის თანახმად r არის B_0-ზე ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია. ვთქვათ $r(x,t)=(\overline{r}(x,t),{}^{\circ}(x,t))$, სადაც $x\in X$, $t\in I$ და $\overline{r}(x,t)\in X$, ${}^{\circ}(x,t)\in I$.

$g_2:X\times I\to X\times I$ დეფორმაცია განსაზღვრული ფორმულით

$$g_2(x,t)=(\overline{r}(x,(1-{}^{2})t),(1-{}^{2})^{\circ}(x,t)+{}^{2}t),x\in X,t\in I$$

არის B_0-ზე დეფორმაცია და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$g_0=i\cdot r,$$

$$g_1=1_X,$$

$$g_2(x,t)=(x,t),(x,t)\in\tilde{A}.$$

□

შედეგი 2.9. *ვთქვათ* (X,A) *არის ბორსუკის ჩაკეტილი წყვილი* B_0*-ზე. მაშინ* $(A,®_A)$ *ქვესივრცე არის* $(X,®_X)$*-ის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი* B_0*-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $i:(A,®_A)\to(X,®_X)$ *ჩადგმა არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა.* □

1.2 ფიბრული SSDR-ასახვების და ფიბრანტული სივრცეების შესახებ

ამ პარაგრაფში მოცემულია შეიპური ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქციის ასახვასთან (SSDR-ასახვასთან) და ფიბრანტულ სივრცეებთან ასოცირებული განმარტებები და სხვადასხვა ცნებები და დადგენილია მათი თვისებები.

აქ განხილული ყველა სივრცე არის მეტრიზებადი. პარაგრაფ 1.2-ში საბაზისო განმარტებაა შემდეგი.

განმარტება 1.2.1. *ვთქვათ* $(X,®_X)\in ob(\mathrm{M}_{\mathrm{B}_0})$ *და* A *არის* X *სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე.* B_0*-ზე* $(A,®_{X|A})$ *ქვესივრცეს ეწოდება* $(X,®_X)$ *სივრცის შეიპური ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი* B_0*-ზე, თუ არსებობს* $\sim:(X,®_X)\to(Y,®_Y)\in \mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$ *ჩადგმა* B_0*-ზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:*

$(Y,®_Y)$*-ში* $\sim(X)$ *და* $\sim(A)$ *ანასახების ნებისმიერი* U *და* V *მიდამოებისთვის არსებობს* B_0*-ზე ისეთი ჰომოტოპია* $H:(X\times I,®_{X\times I})\to(U,®_{Y|U})\mathrm{rel}A$*, რომ ყოველი* $x\in X$ *წერტილისთვის* $H(x,0)=\sim(x)$ *და* $H(x,1)\in V$.

განმარტებიდან ჩანს რომ, თუ $\sim:(X,®_X)\to(M,®_M)$ ჩადგმა B_0-ზე აკმაყოფილებს 1.2.1 განმარტების პირობებს, მაშინ ეს პირობები სრულდება ყოველი $:(X,®_X)\to(Z,®_Z)\in\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$ ჩაკეტილი ჩადგმისათვის B_0-ზე.

B_0-ზე $i:(A,®_A)\to(X,®_X)$ ჩაკეტილ ჩადგმას ეწოდება $\mathrm{SSDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვა, თუ i ასახვა $(A,®_A)$-ს ჩადგამს $(X,®_X)$-ში, როგორც $(X,®_X)$-ის შეიპურ ძლიერ დეფორმაციულ რეტრაქტს B_0-ზე.

$\mathrm{SSDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვის ცნება აზოგადებს $\mathrm{SDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვის ცნებას. თავი 1-ის პარაგრაფ 2.1-ის შედეგთა შორის ერთერთი მთავარია შემდეგი თეორემა, რომელიც არის $([\mathrm{C}_1],[\mathrm{C}_2])$-ის თეორემა 1.2-ის ფიბრული ვერსია.

თეორემა 1.2.2. *ვთქვათ* $(X,®_X)\in\mathbf{M}_{\mathbf{B}_0}$ *და* A *არის* X *სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. მაშინ ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

a) $i:(A,®_{X|A})\to(X,®_X)$ *არის* SSDR*-ასახვა* B_0*-ზე;*

b) *ყოველი* B_0*-ზე* $f:(A,®_{X|A})\to(Y,®_Y)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *ასახვისათვის არსებობს ისეთი* $\tilde{f}:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *ასახვა* B_0*-ზე, რომ* $\tilde{f}\cdot i=f$ *და ნებისმიერი ორი ასეთი* B_0*-ზე გაფართოება არის ფიბრულად ჰომოტოპიური* $\mathrm{i}\,A$ *ანასახის მიმართ;*

c) *ყოველი კომუტაციური დიაგრამისათვის*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "i"'] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] & & E \arrow[dd, "p"] \arrow[dl, "\pi_E"'] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
X \arrow[rr, "F"'] \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[uurr, dashed, bend right, "\tilde{F}"'] & & B, \arrow[ul, "\pi_B"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $p:(E,\circledR_E)\to(B,\circledR_B)$ *არის ფიბრაცია* B_0*-ზე და* $(E,\circledR_E)$ *და* $(B,\circledR_B)$ *არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცეები, არსებობს ისეთი* $\tilde{F}:(X,\circledR_X)\to(E,\circledR_E)$ *ასახვა* B_0*-ზე, რომ* $\tilde{F}\cdot i=f$ *და* $p\cdot\tilde{F}=F$.

d) B_0*-ზე ასახვების ყოველი კომუტაციური დიაგრამისათვის*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "i"'] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] & & P^K_{\mathrm{B}_0} \arrow[dd, "j^*"] \arrow[dl, "\pi_{P^K}"'] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
X \arrow[rr, "F"'] \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[uurr, dashed, bend right, "H"'] & & P^L_{\mathrm{B}_0}, \arrow[ul, "\pi_{P^L}"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $P\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, L *არის* K *სასრული* CW*-კომპლექსის ქვეკომპლექსი, ხოლო* $j:L\to K$ *ჩადგმის ასახვა, არსებობს* B_0*-ზე ფილერი* $H:(X,\circledR_X)\to(P^K,\circledR_{P^K})$.

დამტკიცება. შევამოწმოთ შემდეგი იმპლიკაციის სამართლიანობა a)$\Rightarrow$ b)$\Rightarrow$ c)$\Rightarrow$ d)$\Rightarrow$a).

a)$\Rightarrow$b). მსგავსად [B4]-ის წინადადება 2-ის მტკიცებისა შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $(X,\circledR_X)$ სივრცე არის $w(M)\le max(w(X),w(\mathrm{B}_0),\aleph_0)$ წონის მქონე B_0-ზე $(M,\circledR_M)$ $\mathrm{AE}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. აქ $M=B\times K$, სადაც K არის X სივრცის ამოზნექილი გარსი L ნორმირებულ ვექტორულ სივრცეში. რადგანაც $(Y,\circledR_Y)$ არის $\mathrm{ANE}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე, ამიტომ არსებობს A-ს ღია მიდამო M-ში და $f:(A,\circledR_{X|A})\to(Y,\circledR_Y)$ ასახვის B_0-ზე გაგძელება $\hat{f}:(V.\circledR_{M|A})\to(Y,\circledR_Y)$. a) პირობის თანახმად არსებობს B_0-ზე ჰომოტოპია $H:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(M,\circledR_M)$ ისეთი, რომ

$$H(x,0)=x,\ \ x\in X$$
$$H(x,1)\in V,\ \ x\in X$$
$$H(a,t)=a,\ a\in A\ t,\in I$$

ვთქვათ $\tilde{f}:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ არის ასახვა მოცემული შემდეგი ფორმულით

$$\tilde{f}=\hat{f}(H(x,1)),\ \ x\in X$$

შევნიშნოთ, რომ

$$(®_Y\cdot\tilde{f})(x)=®_Y(\tilde{f}(x))=®_Y(\hat{f}(H(x,1)))=(®_Y\cdot\hat{f})(H(x,1))=$$
$$=®_{M|A}(H(x,1))=®_M(H(x,1))=®_{X\times I}(x,1)=®_X(x).$$

მაშასადამე, $®_Y\cdot\tilde{f}=®_X$ და აქედან გამომდინარე, $\tilde{f}$ არის B_0-ზე ასახვა. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ორი ასეთი გაგრძელება არის ფიბრული ჰომოტოპიური A-ს მიმართ. ვთქვათ $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ არის f ასახვის B_0-ზე გაგძელებები. განვიხილოთ $(M\times I,®_{M\times I})$ სივრცის $N=X\times\{0\}\cup A\times I\cup X\times\{1\}$ ქვესივრცე. B_0-ზე ასახვა $F:N\to Y$ განვმარტოთ შემდეგნაირად

$$F(x,0)=\tilde{f}_1(x),\ x\in X$$
$$F(x,1)=\tilde{f}_2(x),\ x\in X$$
$$F(x,a)=f(a),\ a\in A\ t,\in I$$

ცხადია, რომ $M\times I=(B\times K)\times I\approx B\times(K\times I)\in\mathrm{AE}_{\mathrm{B}_0}$, რადგანაც $K\times I\in\mathrm{AE}(M)$ (იხილეთ $[\mathrm{Y}_2]$-ის წინადადება 1.1). არსებობს $F:(N,®_{M\times I|N})\to(Y,®_Y)$ B_0-ზე ასახვის B_0-ზე გაგძელება N-ის $M\times I$-ში რაიმე W ღია მიდამოზე, $\bar{F}:(W,®_{M\times I|W})\to(Y,®_Y)$.

ვთქვათ U არის X-ის M-ში ისეთი ღია მიდამო, რომ $U\times\{0\}\subset W$ და $U\times\{1\}\subset W$. გარდა ამისა, განვიხილოთ A-ს M-ში ისეთი V ღია მიდამო, რომ $V\times I\subset W$. a) პირობიდან გამომდინარე, არსებობს B_0-ზე ჰომოტოპია $D:(X\times I,®_{X\times I})\to(U,®_{M|U})$ შემდეგი თვისებებით

$$D(x,0)=x,\ x\in X$$
$$D(x,1)\in V,\ x\in X$$
$$D(a,t)=a,\ a\in A\ t,\in I$$

ვთქვათ, $F'(x,t)=\bar{F}(D(x,t),0)$, $F''(x,t)=\bar{F}(D(x,t),1)$ და $H(x,t)=\bar{F}(D(x,1),t)$. შევნიშნოთ, რომ F', F'' და H ინდუცირებს ფიბრულ ჰომოტოპიებს:

$$F':\tilde{f}_1\simeq_{B_0} h_1 \ \mathrm{rel}\, A,$$

$$F'':\tilde{f}_2\simeq_{B_0} h_2 \ \mathrm{rel}\, A,$$

$$H:h_1\simeq_{B_0} h_2 \ \mathrm{rel}\, A.$$

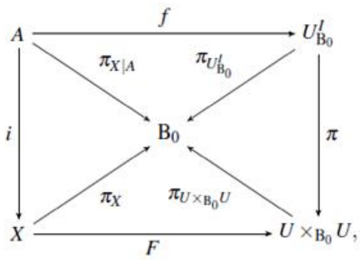
მაშასადამე, $\tilde{f}_1\simeq_{B_0}\tilde{f}_2 \ \mathrm{rel}\, A$.

b)$\Rightarrow$c). b) პირობიდან გამომდინარე $(E,®_E)\in \mathrm{ANE}_{B_0}$ B_0-ზე სივრცისთვის არსებობს B_0-ზე ასახვა $\bar{F}:(X,®_X)\to(E,®_E)$ ისეთი, რომ $\bar{F}\cdot i=f$. შევნიშნო, რომ $F\cdot i=p\cdot f=p\cdot\bar{F}\cdot i$. b) პირობიდან ასევე გამომდინარეობს, რომ არსებობს B_0-ზე ჰომოტოპია $H:F\simeq_{B_0} p\cdot\bar{F} \ \mathrm{rel}\, i(A)$. მაშასადამე, არსებობს ისეთი ფიბრული ჰომოტოპია $\tilde{H}:(X\times I,®_{X\times I})\to(E,®_E)$, რომ $p\cdot\tilde{H}=H$. $\tilde{H}$ ფიბრული ჰომოტოპია ინდუცირებს B_0-ზე ასახვას $\tilde{F}:(X,®_X)\to(E,®_E)$ შემდეგი თვისებებით $\tilde{F}\cdot i=f$ და $p\cdot\tilde{F}=F$.

c)$\Rightarrow$d). [B4]-ის წინადადება 9-ის თანახმად $P^K_{B_0}$ და $P^L_{B_0}$ სივრცეები არის ANR_{B_0}-სივრცეები. ასევე, შევნიშნოთ, რომ $j^*:P^K_{B_0}\to P^L_{B_0}$ არის B_0-ზე ფიბრაცია. აქედან გამომდინარე, არსებობს B_0-ზე ფილერი $H:(X,®_X)\to(P^K_{B_0},®_{P^K_{B_0}})$.

d)$\Rightarrow$a). ვთქვათ $(X,®_X)$ არის $(M,®_M)$ AR_{B_0}-სივრცის B_0-ზე ჩაკეტილი ქვესივრცე. ვთქვათ $i:(A,®_{X|A})\to(X,®_X)$ არის A ჩაკეტილი სიმრავლის X-ში ჩადგმა მოცემული ფორმულით $i(a)=a$ ყოველი $a\in A$ წერტილისთვის.

განვიხილოთ U და V ღია მიდამოები შესაბამისად X-სა და A-სი, M -ში, ისეთი, რომ $V\subseteq U$. შევნიშნოთ, რომ $(U,®_{M|U}),(V,®_{M|V})\in\mathrm{ANR}_{B_0}$. ვთქვათ, $P=V$, $K=\{*\}$, $L=\varnothing$ და $f:(A,®_{X|A})\to(V,®_{M|V})$ არის B_0-ზე ჩადგმის ასახვა. d) პირობიდან გამომდნარე არსებობს B_0-ზე ასახვა $r:(X,®_X)\to(V,®_{M|V})$ ისეთი, რომ $r\cdot i=f$. ახლა, დავუშვათ, რომ $P=U$, $K=I$ და $L=\{0,1\}$. განვიხილოთ კომუტაციური დიაგრამა



სადაც

$$\circledR(\mu) = (\mu(0), \mu(1)),\ \mu \in U^I_{B_0}\ ,$$

$$f(a)(t) = a,\ a \in A\ ,\ t \in I\ ,$$

$$F(x) = (x, r(x)),\ x \in X\ .$$

ადვილი დასანახია, რომ $\circledR_{X|A} = \circledR_{U^I_{B_0}} \cdot f$, $\circledR_{U^I_{B_0}} = \circledR_{U\times_{B_0}U} \cdot \circledR$ და $\circledR_X = \circledR_{U\times_{B_0}U} \cdot F$. ასევე შევნიშნოთ, რომ $U \times_{B_0} U$ და U_{B_0} არის ANR_{B_0}-სივრცეები.

d) პირობიდან გამომდინარე არსებობს B_0-ზე ჰომოტოპია $H : (X, \circledR_X) \to (U^I_{B_0}, \circledR_{U^I_{B_0}})$ ისეთი, რომ $H \cdot i = f$ და $\circledR \cdot H = F$.

ვთქვათ, $D : (X \times I, \circledR_{X\times I}) \to (U, \circledR_{M|U})$ არის B_0-ზე ასახვა მოცემული ფორმულით

$$D(x,t) = H(x,t),\quad (x, t) \in X \times I\ .$$

D ასახვა აკმაყოფილებს B_0-ზე SSDR-ასახვის განმარტების ფირობებს. □

ახლა გვჭირდება B_0-ზე ფიბრანტული სივრცეების განმარტება და მათი გამოკვლევა.

განმარტება 1.2.3. B_0-*ზე* $(Y, \circledR_Y)$ *სივრცეს ეწოდება* B_0-*ზე ფიბრანტული სივრცე, თუ ყოველი* B_0-*ზე* SSDR-*ასახვისთვის* $i : (A, \circledR_{X|A}) \to (X, \circledR_X)$ *და ყოველი* B_0-*ზე* $f : (A, \circledR_{X|A}) \to (Y, \circledR_Y)$ *ასახვისათვის არსებობს ისეთი* B_0-*ზე* $F : (X, \circledR_X) \to (Y, \circledR_Y)$ *ასახვა, რომ* $F \cdot i = f$ *, ე.ი. კომუტაციურია შემდეგი დიაგრამა*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] \arrow[ddr, "f"'] & & X \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[ddl, "F"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
& Y \arrow[u, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებას.

წინადადება 1.2.4. *თუ* Y *არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *-სივრცე, მაშინ* Y *ასევე ფიბრანტული სივრცეა.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $i:(A,\circledR_{X|A})\to(X,\circledR_X)$ არის $\mathrm{SSDR}_{\mathrm{B}_0}$ -ასახვა და $(Y,\circledR_Y)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$. a$\Rightarrow$b) იმპლიკაციის თანახმად ყოველი $f:(A,\circledR_{X|A})\to(Y,\circledR_Y)$ B_0-ზე ასახვისთვის არსებობს B_0-ზე გაგძელება $\tilde{f}:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ ისეთი, რომ $\tilde{f}\cdot i=f$. ამრიგად, Y არის B_0-ზე ფიბრანტული სივრცე. □

თეორემა 1.2.5. *თუ* $(Y,\circledR_Y)$ *არის* B_0 *-ზე ფიბრანტული სივრცე და* Z *კომპაქტური სივრცეა, მაშინ* $(Y^Z_{\mathrm{B}_0},\circledR_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}})$ *აგრეთვე არის* B_0 *-ზე ფიბრანტული სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $(X,\circledR_X)$ B_0-ზე მეტრიკული სივრცეა, A X-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, $i:(A,\circledR_{X|A})\to(X,\circledR_X)$ $\mathrm{SSDR}_{\mathrm{B}_0}$ -ასახვა და $f:(A,\circledR_{X|A})\to(Y^Z_{\mathrm{B}_0},\circledR_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}})$ B_0-ზე სივრცე. $F:(A\times Z,\circledR_{A\times Z})\to(Y,\circledR_Y)$ ასახვა მოცემული

$$F(a,z)=(f(a))(z),(a,z)\in(A\times Z,\circledR_{A\times Z})$$

ფორმულით არის B_0-ზე ასახვა. მართლაც, ყოველი $(a,z)\in A\times Z$ წყვილისთვის გვაქვს

$$\left(\circledR_Y\cdot F\right)=\circledR_Y(F(a,z))=\circledR_Y(f(a)(z))=\circledR_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}}(f(a))=pi_{X|A}(a)=\circledR_{A\times Z}(a,z).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $i:(A,\circledR_{X|A})\to(X,\circledR_X)$ არის B_0-ზე SSDR-ასახვა, მაშინ $i\times 1_Z:(A\times Z,\circledR_{A\times Z})\to(X\times Z,\circledR_{X\times Z})$ არის B_0-ზე SSDR-ასახვა. მართლაც, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $(X\times Z,\circledR_{X\times Z})$ წყვილი, სადაც $\circledR_{X\times Z}((x,z))=\circledR_X(x)$, არის ისეთი ჩადგმა რაიმე $(M\times N,\circledR_{M\times N})$ $\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცეში, რომ $(X,\circledR_X)$ და Z არის ჩადგმადი შესაბამისად $(M,\circledR_M)\in\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$-ში და $N\in\mathrm{AR}$-ში. ვთქვათ W და Q არის ღია მიდამოები შესაბამისად $X\times Z$-ის და $A\times Z$-ის $M\times N$ $\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცეში. არსებობს U და V ღია მიდამოები შესაბამისად X-ისა და A-ს M-ში ისეთი, რომ $U\times Z\subset W$ და $V\times Z\subset Q$. რადგან i არის

B_0-ზე SSDR-ასახვა ამიტომ არსებობს B_0-ზე ჰომოტოპია $H:(X,®_X)\times I\to(U,®_{M|U})$, აკმაყოფილებს $H(x,0)=i(x)$ და $H(x,1)\in V$ თვისებებს.

ვთქვათ $\tilde{H}:(X\times Z\times I,®_{X\times Z\times I})\to(U\times Z,®_{U\times Z})$ არის ასახვა მოცემული შემდეგი ფორმულით

$$\tilde{H}(x,z,t)=(H(x,t),z),(x,z)\in X\times Z,t\in I.$$

შევნიშნოთ, რომ $\tilde{H}$ არის B_0-ზე ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$\tilde{H}(x,z,0)=(H(x,0),z)=(i(x),z)=(i\times 1_Z)(x,z)$$

და

$$\tilde{H}(x,z,1)=(H(x,1),z)\in V\times Z\subset Q.$$

რადგან $(Y,®_Y)$ არის B_0-ზე ფიბრანტული სივრცე, ამიტომ არსებობს B_0-ზე ასახვა $\bar{F}:(X\times Z,®_{X\times Z})\to(Y,®_Y)$, რომლისთვისაც $\bar{F}\cdot(i\times 1_Z)=\tilde{f}$, სადაც $\tilde{f}:(A\times Z,®_{A\times Z})\to(Y,®_Y)$ არის B_0-ზე ასახვა მოცემული შემდეგი ფორმულით

$$\tilde{f}(a,z)=(f(a))(z),(a,z)\in A\times Z.$$

ვთქვათ, $\tilde{F}:(X,®_X)\to(Y^Z_{\mathrm{B}_0},®_{Y^Z_{\mathrm{B}_0}})$ არის ასახვა განმარტებული შემდეგნაირად

$$(\tilde{F}(x))(z)=\bar{F}(x,z),x\in X,z\in Z.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\tilde{F}\cdot i=f$.□

თეორემა 1.2.6. *ვთქვათ* $\mathbf{Y}=((Y_n,®_{Y_n}),p_{n,n+1},N^+)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცეების და ფიბრაციების შებრუნებული სისტემა. მაშინ* $Y=\varprojlim\mathbf{Y}$ *ზღვრული სივრცე არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცე და* $p_n:(Y,®_Y)\to(Y_n,®_{Y_n})$ *ბუნებრივი პროექციები არის* B_0*-ზე ფიბრაციები.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $(y_n)\in Y=\varprojlim\mathbf{Y}$. ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $n<n+1$ მთელი რიცხვისთვის

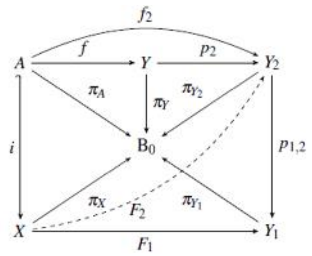
$$®_n(y_n)=(®_n\cdot p_{n,n+1})(y_{n+1})=®_{n+1}(y_{n+1}).$$

დავუშვათ,

$$®_Y((y_n)) = ®_n(y_n), (y_n) \in Y.$$

შევნიშნოთ, რომ $®_{Y_n} \cdot p_n = ®_Y$. მაშასადამე, $(Y, ®_Y)$ არის B_0-ზე სივრცე და $p_n : Y \to Y_n$ არის B_0-ზე ასახვა.

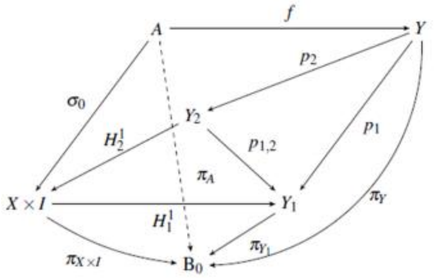
ვთქვათ, $f_n = p_n \cdot f, n \in N$. ცხადია, რომ არსებობს B_0-ზე ასახვა $F_1 : X \to Y_1$, რომლისთვისაც $F_1 \cdot i = p_1 \cdot f$. შემდეგი კომუტაციური დიაგრამისთვის



არსებობს B_0-ზე ასახვა $F_2 : (X, ®_X) \to (Y_2, ®_{Y_2})$, რომელიც აკმაყოფილებს $F_2 \cdot i = f_2$ და $p_{1,2} \cdot F_2 = F_1$ პირობებს. ინდუქციის წესით შეგვიძლია ავაგოთ $F_n : X \to Y_n$ B_0-ზე ასახვებისგან შედგენილი $\{F_n\}_{n \in N^+}$ მიმდევრობა, რომლისთვისაც $p_{n,n+1} \cdot F_{n+1} = F_n$ და $F_n \cdot i = f_n$.

ვთქვათ, $F = \underset{n \in N^+}{\Delta} F_n : X \to \prod_{n \in N^+} Y_n$ არის $F_n : (X, ®_X) \to (Y_n, ®_{Y_n}), n \in N^+$ ასახვების B_0-ზე დიაგონალური ნამრავლი. F ასახვა ინდუცირებს B_0-ზე ასახვას, რომელიც კვლავ აღვნიშნოთ $F : (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ სიმბოლოთი. ადვილი შესამჩნევია, რომ $F \cdot i = f$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $p_1 : (Y, ®_Y) \to (Y_1, ®_{Y_1})$ არის B_0-ზე ფიბრაცია. შევადგინოთ კომუტაციური დიაგრამა



ცხადია, არსებობს B_0-ზე ასახვა $H_1^1:\left(X\times I,\circledR_{X\times I}\right)\to\left(Y_2,\circledR_{Y_2}\right)$ ისეთი, რომ $H_1^1\cdot\pm_0=p_1\cdot f=p_{1,2}\cdot(p_2\cdot f)$. ამრიგად, შეგვიძლია შევარჩიოთ B_0-ზე ასახვა $H_2^1:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y_2,\circledR_{Y_2})$, რომლისთვისაც $H_2^1\cdot\pm_0=p_2\cdot f$ და $p_{1,2}\cdot H_2^1=H_1^1$. აქედან გამომდინარე, ინდუქციის წესით შეგვიძლია ავაგოთ $H_n^1:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y_n,\circledR_{Y_n})$ B_0-ზეასახვებისაგან შედგენილი ისეთი მიმდევრობა $H_1^1,H_2^1,\cdots H_n^1,\cdots$, რომ $H_n^1=p_{n,n+1}\cdot H_{n+1}^1, n\in N^+$. ვთქვათ, $H_1:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y,\circledR_Y)$ არის ასახვა განმარტებული შემდეგნაირად

$$H_1=\underset{n\in N}{\Delta}H_n^1:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y,\circledR_Y).$$

საბოლოოდ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $H^1\cdot\pm_0=f$ და $p_1\cdot H_1=H_1^1$.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ B_0-ზე ასახვები $p_2,p_3,\cdots$ არის B_0-ზე ფიბრაცია. □

თეორემა 1.2.7. *ვთქვათ* $f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ *არის* B_0*-ზე ასახვა. თუ* $(X,\circledR_X),(Y,\circledR_Y)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, *მაშინ* $\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(Z,\circledR_Z)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B}_0})$ და A არის Z -ის ჩაკეტილი ქვესივრცე და ვთქვათ, $g:(A,\circledR_{Z|A})\to\mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ B_0-ზე ასახვაა. $g_2=\mu_1^{\#}\cdot g:(A,\circledR_{Z|A})\to(X,\circledR_X)$ კომპოზიციისთვის არსებობს A-ს ღია მიდამო U Z-ში და B_0-ზე $\mu_1^{\#}\cdot g$ ასახვის B_0-ზე გაგრძელება $\tilde{g}_2:(U,\circledR_{Z|U})\to(X,\circledR_X)$. შევნიშნოთ, რომ

$$f\cdot\tilde{g}_2(a)=f(\tilde{g}_2(a))=f(g_2(a))=f\cdot\mu_1^{\#}\cdot g(a)=\mu_1\cdot f_{\mu_1}\cdot g(a)=(f_{\mu_1}\cdot g(a))(1).$$

კომპოზიცია $f_{\mu_1}\cdot g:(A,\circledR_{Z|A})\to(Y_{\mathrm{B}_0}^I,\circledR_{Y_{\mathrm{B}_0}^I})$ ინდუცირებს B_0-ზე ასახვას $H:A\times I\to Y$ მოცემულს შემდეგნაირად

$$H(a,t)=((f_{\mu_1}\cdot g)(a))(t),(a,t)\in A\times I.$$

ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $a\in A$ წერტილისა და $t\in I$ რიცხვისთვის

$$H(a,1)=((f_{\mu_1}\cdot g)(a))(1)=(\mu_1\cdot f_{\mu_1}\cdot g)(a)=(f\cdot\mu_1^{\#}\cdot g)(a)=$$
$$=f\cdot((\mu_1^{\#}\cdot g)(a))=f(\tilde{g}_2(a))=(f\cdot\tilde{g}_2)(a)=(f\cdot\tilde{g}_{2|A})(a).$$

ვთქვათ, $G:\left(\left(U\times\{0\}\right)\cup A\times I,®_{U\times\{0\}\cup A\times I}\right)\to\left(Y,®_{Y}\right)$ ასახვაა მოცემული შემდეგნაირად

$$G(u,1)=f\tilde{g}_2(u), u\in U,$$

$$G(a,t)=H(a,t),(a,t)\in A\times I.$$

არსებობს B_0-ზე გაგძელება $\tilde{G}:\left(U\times I,®_{U\times I}\right)\to\left(Y,®_{Y}\right)$ ისეთი, რომ

$$\tilde{G}_{|_{U\times\{1\}}}=f\cdot\tilde{g}_2$$

და

$$\tilde{G}_{|_{A\times I}}=H.$$

$\tilde{G}$ ასახვა ინდუცირებს $\tilde{g}_1:(U,®_{Z|_U})\to(Y^I_{B_0},®_{Y^I_{B_0}})$ ასახვას, რომლისთვისაც

$$(\tilde{g}_1(u))(t)=\tilde{G}(u,t), u\in U, t\in I.$$

ვთქვათ, $\tilde{g}=\tilde{g}_1\Delta\tilde{g}_2:(U,®_{Z|_U})\to(\mathrm{coCyl}_{B_0}(f),®_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)})$.

ასევე შევნიშნოთ, რომ ყოველი $\hat{g}(u)=(\tilde{g}_1(u),\tilde{g}_2(u))$ წყვილი აკმაყოფილებს პირობას

$$\tilde{g}_1(u)(1)=\tilde{G}(u,1)=f\tilde{g}_2(u), u\in U,$$

ე.ი. $\tilde{g}(u)\in \mathrm{coCyl}_{B_0}(f)$. აქედან გამომდინარე,

$$\tilde{g}(a)=(\tilde{g}_1(a),\tilde{g}_2(a))=(\tilde{g}_1(a),g_2(a))=(\tilde{g}_1(a),\mu_1^{\#}g(a)), a\in A.$$

შევნიშნოთ, რომ $\tilde{g}_1(a)$ არის ისეთი ასახვა $\tilde{g}_1(a):I\to Y$, რომ

$$\tilde{g}_1(a)(t)=\tilde{G}(a,t)=H(a,t)=((f_{\mu_1}\cdot g)(a))(t),$$

ე.ი. $\tilde{g}_1(a)=f_{\mu_1}\cdot g(a)$.

ამრიგად, ყოველი $a\in A$ წერტილისთვის გვაქვს

$$\tilde{g}(a)=(\tilde{g}_1(a),\tilde{g}_2)=(f_{\mu_1}\cdot g(a),\mu_1^{\#}\cdot g(a))=g(a). \ \square$$

თეორემა 1.2.8. *ვთქვათ* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტულ სივრცეებს შორის* B_0*-ზე ასახვა. მაშინ* B_0*-ზე კოცილინდრი* $\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $g:(A,®_{Z|_A})\to(\mathrm{coCyl}_{B_0}(f),®_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)})$ არის B_0-ზე ასახვა $(Z,®_Z)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B}_0})$-ის $(A,®_{Z|A})$ ჩაკეტილი ქვესივრციდან $(\mathrm{coCyl}_{B_0}(f),®_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)})$-ში. ცხადია,

არსებობს $g_2 = \mu_1^{\#} \cdot g : (A, ®_{Z|_A}) \to (X, ®_X)$ B_0-ზე ასახვის B_0-ზე გაგძელება $\tilde{g}_2 : (Z, ®_Z) \to (X, ®_X)$. შევნიშნოთ, რომ თეორემა 1.2.2-ის a)$\Leftrightarrow$b) ექვივალენტობიდან გამომდინარე B_0-ზე ჩადგმა $(X \times \{0\} \cup A \times I, ®_{X \times \{0\} \cup A \times I}) \to (X \times I, ®_{X \times I})$ არის B_0-ზე SSDR-ასახვა.

ვთქვათ,

$$G : (Z \times \{0\} \cup A \times I, ®_{Z \times \{0\} \cup A \times I}) \to (Y, ®_Y)$$

არის ასახვა მოცემული

$$G(z,1) = f\tilde{g}_2(z), z \in X$$

და

$$G(a,t) = H(a,t), (a,t) \in A \times I,$$

ფორმულებით, სადაც $H : (A \times I, ®_{A \times I}) \to (Y, ®_Y)$ არის B_0-ზე ასახვა მოცემული $H(a,t) = ((f_{\mu_1} \cdot g)(a))(t)$ ფორმულით.

მსგავსად წინადადება 1.2.7-ის მტკიცებისა შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ არსებობს B_0-ზე ასახვა $\tilde{g}_1 : (Z, ®_Z) \to (Y^I, ®_{Y^I_{B_0}})$, რომლისთვისაც

$$\tilde{g}_1(z)(1) = f\tilde{g}_2(z), z \in Z.$$

ვთქვათ, $\tilde{g} = \tilde{g}_1 \Delta \tilde{g}_2 : (Z, ®_Z) \to (\mathrm{coCyl}_{B_0}(f), ®_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)})$. ცხადია, რომ $\tilde{g}_{|_A} = g$.

ამრიგად, $(\mathrm{coCyl}_{B_0}(f), ®_{\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)})$ წყვილი არის B_0-ზე ფიბრანტული სივრცე. □

თავი 2

კომპაქტურ-მეტრიზებად სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კლასიფიკაციები

აგებული და შესწავლილია ფიბრული კოტელესკოპები და $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტები, დამტკიცებულია $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტის გაფართოების შესახებ თეორემა, აგებულია კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების კატეგორიაზე ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია და შესწავლილია B_0-ზე ასახვის ორმაგი ცილინდრის ცნებაზე დაფუძნებული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობების მახასიათებლები.

2.1 კომპაქტურ-მეტრიზებად სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორიის შესახებ

თავდაპირველად შევადგინოთ B_0-ზე შებრუნებული მიმდევრობის კოტელესკოპი. ვთქვათ, $\mathbf{X} = \{(X_n, ®_{X_n}), q_n^{n+1}, N^+\}$ არის B_0-ზე შებრუნებული მიმდევრობა. ყოველი $q_n^{n+1} : (X_{n+1}, ®_{X_{n+1}}) \to (X_n, ®_{X_n})$ B_0-ზე საზღვრის ასახვისთვის განვიხილოთ $q_n^{n+1} : (X_{n+1}, ®_{X_{n+1}}) \to (X_n, ®_{X_n})$ B_0-ზე ასახვის B_0-ზე კოცილინდრი $X_{n,n+1} = \mathrm{coCyl}_{\mathrm{B}_0}(q_n^{n+1})$, $p_n = \mu_1 \cdot f_{\mu_1} : X_{n,n+1} \to X_n$ B_0-ზე ასახვა და $r_{n+1} = \mu_1^{\#} : X_{n,n+1} \to X_{n+1}$ B_0-ზე შეკუმშული ფიბრაცია $i_{n+1} : X_{n+1} \to X_{n,n+1}$ $\mathrm{SDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვის მიმართ.

$\mathbf{X}$ შებრუნებული სისტემის B_0-ზე კოტელესკოპი, აღინიშნება $\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ სიმბოლოთი, განიმარტება როგორც შემდეგი $T(\mathbf{X})$ დიარამის შებრუნებული ზღვარი

$$\begin{tikzcd}
& (X_{0,1},\pi_{X_{0,1}}) \arrow[d] \arrow[ddl, "p_0"'] \arrow[ddr, "r_1"] & & (X_{1,2},\pi_{X_{1,2}}) \arrow[d] \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[ddr, "r_2"] & & & & (X_{n-1,n},\pi_{X_{n-1,n}}) \arrow[d] \arrow[ddl, "p_{n-1}"'] \arrow[ddr, "r_n"] & \\
& \mathrm{B}_0 & & \mathrm{B}_0 & & \cdots & & \mathrm{B}_0 & \cdots \\
(X_0,\pi_{X_0}) \arrow[ur] & & (X_1,\pi_{X_1}) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[ll, "q_0^1"] & & (X_2,\pi_{X_2}) \arrow[ul] \arrow[ll, "q_1^2"] & \cdots \arrow[l] & (X_{n-1},\pi_{n-1}) \arrow[ur] \arrow[l] & & (X_n,\pi_{X_n}) \arrow[ul] \arrow[ll, "q_{n-1}^n"]
\end{tikzcd}$$

B_0-ზე კოტელესკოპის განმარტების თანახმად, $\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}) = \varprojlim T(\mathbf{X})$ არის $\left(x_0, \mu_0, x_1, \mu_1, x_2, \mu_2, \cdots\right) \in \prod_{i=0}^{\infty}\left(X_i \times_{\mathrm{B}_0} X_i^I\right)$ წერტილის B_0-ზე სივრცე, რომლისთვისაც

$$\mu_0(0) = x_0, \mu_0(1) = q_0^1(x_1), \mu_1(1) = q_1^2(x_2), \cdots.$$

ვთქვათ, $T_n(\mathbf{X})$ არის $T(\mathrm{B}_0)$ დიაგრამის პირველი n წევრის მიერ შედგენილი სასრული ქვედიაგრამა და $\left(X_{0,n}, \circledR_{X_{0,n}}\right) = \varprojlim T_n(\mathbf{X})$. ახლა შევადგინოთ შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
& (X_{0,n},\pi_{X_{0,n}}) \arrow[dl, "p_{0,n-1}"'] \arrow[dr, "r_{1,n}"] & & \\
(X_{0,n-1},\pi_{X_{0,n-1}}) \arrow[dr, "r_{1,n-1}"'] & & (X_{1,n},\pi_{X_{1,n}}) \arrow[dl, "p_{1,n}"'] \arrow[dr, "r_{2,n}"] & \\
& (X_{1,n-1},\pi_{X_{1,n-1}}) & & (X_{2,n},\pi_{X_{2,n}})
\end{tikzcd}$$

$$\vdots$$

$$\begin{tikzcd}
& & (X_{0,2},\pi_{X_{0,2}}) \arrow[dl, "p_{01}"'] \arrow[dr, "r_{12}"] & & & & & & \\
& (X_{0,1},\pi_{X_{0,1}}) \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "r_1"] & & (X_{1,2},\pi_{X_{1,2}}) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \cdots & & \cdots & (X_{n-1,n},\pi_{X_{n-1,n}}) \arrow[dl, "p_{n-1}"'] \arrow[dr, "r_n"] & \\
(X_0,\pi_{X_0}) & & (X_1,\pi_{X_1}) & & (X_2,\pi_{X_2}) & \cdots & (X_{n-1},\pi_{X_{n-1}}) & & (X_n,\pi_{X_n})
\end{tikzcd}$$

შევნიშნოთ, რომ ამ დიაგრამაში $p_1, p_2, \ldots, p_n$ არის B_0-ზე ფიბრაციები. ამრიგად, $p_{n,m}$ ასახვები, აგრეთვე არის B_0-ზე ფიბრაცია და $r_{n,m}$ ასახვები არის შეკუმშული ფიბრაციები $i_{n,m}$ ასახვების მიმართ, რადგან ყოველი r_n არის i_n ასახვის მიმართ შეკუმშული ფიბრაცია.

შევცვალოთ r_n ასახვა i_n-ით, $r_{n,m}$ ასახვა კი $i_{n,m}$-ით და ყოველი $n>1$ მთელი რიცხვისთვის გავითვალისწინოთ, რომ $(\tilde{X}_0, \circledR_{\tilde{X}_0}) = (X_0, \circledR_{X_0})$, $\tilde{q}_0^1 = p_0, \tilde{i}_0 = 1_{X_0}, \tilde{i}_1 = i_1$, $(\tilde{X}_n, \circledR_{\tilde{X}_n}) = (X_{0,n}, \circledR_{X_{0,n}})$, $\tilde{q}_{n-1}^n = p_{0,n-1}$, $\tilde{i}_n = i_{1,n} \cdots\cdot i_{n-1,n} \cdot i_n$, მაშინ მივიღებთ $\tilde{\mathbf{X}} = ((\tilde{X}_n, \circledR_{\tilde{X}_n}), \tilde{q}_n^{n+1}, N^+)$ შებრუნებულ სისტემას და შემდეგ კომუტაციურ დიაგრამას

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}_0, \pi_{\tilde{X}_0}) & (\tilde{X}_1, \pi_{\tilde{X}_1}) \arrow[l, "\tilde{q}_0^1"'] & (\tilde{X}_2, \pi_{\tilde{X}_2}) \arrow[l, "\tilde{q}_1^2"'] & \cdots \arrow[l] & (\tilde{X}_n, \pi_{\tilde{X}_n}) \arrow[l] & (\tilde{X}_{n+1}, \pi_{\tilde{X}_{n+1}}) \arrow[l, "\tilde{q}_n^{n+1}"'] & \arrow[l] \\
(X_0, \pi_{X_0}) \arrow[u, "1_{\tilde{X}_0} = \tilde{i}_0"] & (X_1, \pi_{X_1}) \arrow[u, "\tilde{i}_1"] \arrow[l, "q_0^1"] & (X_2, \pi_{X_2}) \arrow[u, "\tilde{i}_2"] \arrow[l, "q_1^2"] & \cdots \arrow[l] & (X_n, \pi_{X_n}) \arrow[u, "\tilde{i}_n"] \arrow[l] & (X_{n+1}, \pi_{X_{n+1}}) \arrow[u, "\tilde{i}_{n+1}"] \arrow[l, "q_n^{n+1}"] & \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}) = \varprojlim \tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{q}_n^{n+1} : (\tilde{X}_{n+1}, \circledR_{\tilde{X}_{n+1}}) \to (\tilde{X}, \circledR_{\tilde{X}})$ არის B_0-ზე ფიბრაცია და ყოველი $n \geqslant 0$ მთელი რიცხვისთვის $\tilde{i}_n : (X_n, \circledR_{X_n}) \to (\tilde{X}_n, \circledR_{\tilde{X}_n})$ არის B_0-ზე $\mathrm{SDR}_{\mathrm{B}_0}$-ასახვა. აგრეთვე, თუ ყოველი $(X_n, \circledR_{X_n})$ არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე ($\mathrm{B}_0$-ზე ფიბრანტული სივრცე), მაშინ ყოველი $(\tilde{X}_n, \circledR_{\tilde{X}_n})$ არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე ($\mathrm{B}_0$-ზე ფიბრანტული სივრცე). კერძოდ, გვაქვს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.1.1. *ვთქვათ* $\mathbf{X} = \{(X_n, \circledR_{X_n}), q_n^{n+1}, N^+\}$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცეების და ასახვების შებრუნებული სისტება. მაშინ* $\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *კოტელესკოპი არის ფიბრანტული სივრცე* B_0*-ზე. თუ* $\mathbf{X}$ *შებრუნებული სისტემის ყოველი* $(X_n, \circledR_{X_n})$ *წევრი არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცე,მაშინ* $\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *აგრეთვე არის ფიბრანტული სივრცე* B_0*-ზე.*

არსებობს ერთადერთი ბუნებრივი B_0-ზე ჩადგმა $i_{\mathbf{q}} : (X, \circledR_X) \to (\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}), \circledR_{\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})})$ ისეთი, რომ ყოველი $n \geq 0$ მთელი რიცხვისთვის სრულდება ტოლობა $\tilde{q}_n\ i_{\mathbf{q}} = i_n\, q_n$.□

ვთქვათ, $X = \varprojlim \mathbf{X}$ და $\mathbf{q} = \{q_n\}_{n \in N^+}$, სადაც $q_n : X \to X_n$ არის B_0-ზე ბუნებრივი პროექციები. მაშინ $\tilde{i}_n$ B_0-ზე SSDR-ასახვები ზემოთ მოცემული დიაგრამიდან

ინდუცირებს ერთადერთ B_0-ზე ბუნებრივ ჩადგმას $i_{\mathbf{q}}:(X,®_X)\to(\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}),®_{\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})})$, ისეთს, რომ ყოველი $n\geq 0$ მთელი რიცვისთვის $\tilde{q}_n\cdot i_{\mathbf{q}}=i_n\cdot q_n$.

განმარტება 2.1.2. $\mathbf{X}=\{(X_n,®_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *შებრუნებულ სისტემას ეწოდება* B_0*-ზე* $(X,®_X)$ *სივრცის* B_0*-ზე, თუ*

a) $(X,®_X)=\varprojlim \mathbf{X}$;

b) $\mathbf{q}=\{q_n:(X,®_X)\to(X_n,®_{X_n})\}_{n\in N^+}$ ოჯახი *აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:ყოველი* $n\in N^+$ მთელი რიცხვისთვის და $(X,®_X)$ *სივრცეში* $q_n(X)$ *ანასახის ყოველი* U *ღია მიდამოსთვის* არსებობს ისეთი $m\geq n$ მთელი რიცხვი, რომ $q_n^m(X_m)\subseteq U$.

თუ ყოველი $(X_n,®_{X_n})\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, *მაშინ* $\mathbf{q}$ *ერთობლიობას ეწოდება* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-რეზოლვენტა* B_0-ზე.

შევნიშნოთ, რომ B_0-ზე რეზოლვენტის ასეთი განმარტება არის [B4]-ში განმარტებული B_0-ზე რეზოლვენტის კერძო შემთხვევა.

ახლა დავამტკიცოთ B_0 სივრცის მიმართ მოცემული კომპაქტური მეტრიკული სივრცის B_0-ზე რეზოლვენტის არსებობის შესახებ თეორემა.

თეორემა 2.1.3. B_0*-ზე ყოველი კომპაქტური მეტრიზებადი* $(X,®_X)$ *სივრცისთვის არსებობს* B_0*-ზე* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-რეზოლვენტა* $\mathbf{q}:(X,®_X)\to X$.

დამტკიცება. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $(X,®_X)$ არის რაიმე $(M,®_M)$ $\mathrm{AR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. მართლაც, არსებობს ჩაკეტილი ჩადგმა

$$j=i\vartriangle ®_X:(X,®_X)\to(M,®_M)=(N\times \mathrm{B}_0,®_{N\times \mathrm{B}_0}),$$

სადაც $i : X \to N$ არის X სივრცის N AR-სივრცეში ჩაკეტილი ჩადგმა. ვთქვათ, X_n არის $\bigcup_{x\in X} B(x,\frac{1}{n})$ გაერთიანება, სადაც $B(x,\frac{1}{n})$ არის ღია ბირთვი x ცენტრითა და $£ = \frac{1}{n}$ რადიუსით M სივრცეში. X სივრცის M-ში ყოველი U მიდამოსთვის და $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $£_x$ რიცხვი, რომ $B(x,£_x) \subset U$. ცხადია, არსებობს $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset X$ სასრული სიმრავლე, ისეთი რომ $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i,£_{x_i})$. ვთქვათ, $£ = \frac{1}{n} \le min\{£_{x_1},£_{x_2},...,£_{x_k}\}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $X_n = \bigcup_{x\in X} B(x,\frac{1}{n})$ ქვესივრცისთვის სრულდება პირობა $X_n \subseteq U$. შევნიშნოთ, რომ X სივრცის M-ში მიდამოებით შედგენილი ოჯახი ქმნის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცეთა შებრუნებულ მიმდევრობას $\mathbf{X} = (X_n, q_n^{n+1}, N^+)$, სადაც q_n^{n+1} არის X_{n+1} -ის ჩადგმის ასახვა X_n-ში. აქედან გამომდინარე $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $(X,®_X) = \underleftarrow{\lim}\, \mathbf{X}$.

ამრიგად, $q_n : (X,®_X) \to (X_n,®_{X_n})$ B_0-ზე ჩადგმებისაგან შედგენილი ოჯახი $\mathbf{q} = \{q_n\}_{n\in N^+}$ ქმნის $(X,®_X)$ B_0-ზე სივრცის $\mathbf{q} : (X,®_X) \to \mathbf{X}$ B_0-ზე რეზოლვენტას. □

თეორემა 2.1.4. *ვთქვათ* $(X,®_X)$ *არის კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე* B_0*-ზე. თუ* $\mathbf{q} : (X,®_X) \to \mathbf{X} = \{(X_n,®_{X_n}), q_n^{n+1}, N^+\}$ *არის* $(X,®_X)$ *-ის რეზოლვენტა* B_0 *-ზე, მაშინ არსებობს უსასრულო ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია*

$$D : \mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}) \times [0,\infty) \to \mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$$

$\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(X)$ *-დან* $i_{\mathbf{q}}(X)$ *-ზე. კერძოდ,* $i_{\mathbf{q}} : (X,®_X) \to \mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *ასახვა არის* SSDR *- ასახვა* B_0 *-ზე.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\tilde{X} = \mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$. B_0-ზე პროექციები $\tilde{q}_i : (\tilde{X},®_{\tilde{X}}) \to (\tilde{X}_i,®_{\tilde{X}_i})$ არის B_0-ზე ფიბრაციები და მათვის სამართლიანია ფიბრული ჰომოტოპიის გავრცელების თვისება.

აქედან გამომდინარე, არსებობს $\tilde{X}$ სივრცის $\tilde{D}_n:(\tilde{X}\times I,®_{\tilde{X}\times I})\to(\tilde{X}_n,®_{\tilde{X}_n})$ B_0-ზე დეფორმაციები $F_n=\tilde{q}_n^{-1}i_n(X_n)$ სივრცეში. $\{F_n\}$ ოჯახი არის $\tilde{X}$ სივრცის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეთა კლებადი სისტემა, ე.ი. ყოველი $n\geq 0$ მთელი რიცხვისთვის

$$\tilde{X}=F_0\supset F_1\supset\ldots\supset F_n\supset F_{n+1}\supset i_{\mathbf{q}}(X).$$

რადგან $\mathbf{q}$ არის B_0-ზე რეზოლვენტა, ამიტომ $i_{\mathbf{q}}(X)$ ქვესივრცის $(\tilde{X},®_{\tilde{X}})$ სივრცეში ყოველი $\tilde{U}$ მიდამოსთვის არსებობს ისეთი m ინდექსი, რომ $F_m\subset\tilde{U}$. ცხადია, არსებობს n ინდექსი და $q_n(i_{\mathbf{q}}(X))$ ქვესივრცის $(\tilde{X}_n,®_{\widetilde{X_n}})$ სივრცეში ისეთი $\tilde{V}$ მიდამო, რომ $\tilde{q}_n^{-1}(\tilde{V})\subset\tilde{U}$. ვთქვათ, $V=\tilde{i}_n^{-1}(\tilde{U})$ და $q_n(X)\subset V\subset X_n$. ასევე არსებობს ისეთი $m\geq n$ ინდექსი, რომლისთვისაც $q_n^m(X_m)\subset V$ და $\tilde{q}_n^m(i_m(X_m))\subset\tilde{V}$. შევნიშნოთ, რომ

$$F_m=\tilde{q}_m^{-1}(\tilde{i}_m(X_m))\subseteq\tilde{q}_n^{-1}(\tilde{q}_n^m(\tilde{i}_m(X_m)))\subseteq\tilde{q}_n^{-1}(\tilde{V})\subset\tilde{U}.$$

აქედან გამომდინარე, B_0-ზე ძლიერი დეფორმაციები D_i ინდუცირებს თეორემის პირობის შესაბამის უსასრულო B_0-ზე დეფორმაციებს $D:\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X})\times[0,+\infty)\to\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X})$. □

თეორემა 2.1.1-ის, თეორემა 2.1.3-ისა და თეორემა 2.1.4-ის ეფექტს ნათლად გამოხატავს შემდეგი შედეგი. ვთქვათ $\tilde{X}=\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X})$.

თეორემა 2.1.5. *ყოველი* B_0*-ზე* $(X,®_X)$ *კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცისთვის არსებობს* B_0*-ზე ფიბრანტული გაფართოება* $i_X:(X,®_X)\to(\tilde{X},®_{\tilde{X}})$. *კერძოდ, თუ* $\mathbf{q}:(X,®_X)\to\mathbf{X}=\{(X_n,®_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *არის* ANR_{B_0}*-რეზოლვენტა* B_0*-ზე, მაშინ*

$$i_{\mathbf{q}}:(X,®_X)\to(\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X}),®_{\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X})})$$

ჩადგმა არის ფიბრანტული გაფართოება B_0*-ზე.* □

თავი 2-ის მთავარი მიზანია ფიქსირებული B_0 სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეებისთვის კოტელესკოპის და ფიბრანტული

სივრცეების ფიბრული ვერსიების გამოყენებით ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის აგება.

ახლა განვმარტოთ ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}$ B_0-ზე სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეებისთვის, როგორც რაიმე ფუნქტორ-რეფლექტორის სრული ანასახი. აქ განვიხილავთ B_0 სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების $\mathbf{H(CM_{B_0})}$ ფიბრული ჰომოტოპიის კატეგორიიდან ფიბრული ფიბრანტული სივრცეების $\mathbf{H(F_{B_0})}$ ფიბრულ ჰომოტოპიის კატეგორიაში ფუნქტორ რეფლექტორს.

ვთქვათ, $(X, ®_X) \in ob(\mathbf{CM_{B_0}})$ და $i_X : (X, ®_X) \to (\tilde{X}, ®_{\tilde{X}})$ არის ფიბრული გაფართოება B_0-ზე. ნებისმიერი $f : (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ B_0-ზე ასახვისთვის, სადაც $(Y, ®_Y)$ არის ფიბრანტული სივრცე B_0-ზე, არსებობს $\tilde{f} : (\tilde{X}, ®_{\tilde{X}}) \to (Y, ®_Y)$ B_0-ზე ასახვა, ისეთი რომ კომუტაციურია შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[ddr, "f"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi_{\tilde{X}}"'] \arrow[ddl, "\tilde{f}"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
& Y \arrow[u, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

ე.ი. $f = \tilde{f} \cdot i_X$. თეორემა 1.1.2-დან გამომდინარეობს, რომ თუ $f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} f' : (\tilde{X}, ®_{\tilde{X}}) \to (Y, ®_Y)$ და $\tilde{f}' \cdot i_X = f'$, მაშინ $\tilde{f} \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} \tilde{f}'$. აქედან გამომდინარე, ასახვა

$$[i_X]^{\#}_{\mathrm{B}_0} : [\tilde{X}, Y]_{\mathrm{B}_0} \to [X, Y]_{\mathrm{B}_0}$$

მოცემული ფორმულით

$$[i_X]^{\#}_{\mathrm{B}_0}([\tilde f]_{\mathrm{B}_0}) = [\tilde f \cdot i_X]_{\mathrm{B}_0}$$

არის ბიექცია. ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 2.1.6. *ვთქვათ* $i_X : (X, \circledR_X) \to (\tilde X, \circledR_{\tilde X})$ *არის* $(X, \circledR_X) \in \mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}}$ *სივრცის ფიბრანტული გაფართოება* B_0*-ზე. მაშინ* $\mathbf{H(CM_{B_0})}$ *კატეგორიის* $[i_X]_{\mathrm{B}_0} : (X, \circledR_X) \to (\tilde X, \circledR_{\tilde X})$ *მორფიზმი არის* $\mathbf{H(F_{B_0})}$*-რეფლექცია.* □

$\{i_X : (X, \circledR_X) \to (\tilde X, \circledR_{\tilde X})\}_{(X, \circledR_X) \in ob(\mathbf{H(CM_{B_0})})}$ ოჯახი ინდუცირებს $\mathbf{H(F_{B_0})}$-რეფლექტორს

$$\mathrm{R} : \mathbf{H(CM_{B_0})} \to \mathbf{H(F_{B_0})}$$

რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\mathrm{R}((X, \circledR_X)) = (\tilde X, \circledR_{\tilde X}), (X, \circledR_X) \in ob(\mathbf{H(CM_{B_0})})$$

და აკმაყოფილებს პირობებს:

კომპაქტური მეტრიზება სივრცეების ყოველი $f : (X, \circledR_X) \to (Y, \circledR_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვისათვის კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "{[i_X]_{\mathrm{B}_0}}"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "{[f]_{\mathrm{B}_0}}"'] & & \tilde X \arrow[dl, "\pi_{\tilde X}"'] \arrow[dd, "R(f)"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
Y \arrow[rr, "{[i_Y]_{\mathrm{B}_0}}"'] \arrow[ur, "\pi_Y"'] & & \tilde Y. \arrow[ul, "\pi_{\tilde Y}"]
\end{tikzcd}$$

ყოველი B_0-ზე f ასახვისთვის არსებობს ისეთი ერთადერთი ფიბრული ჰომოტოპიური ასახვა $\tilde f : (\tilde X, \circledR_{\tilde X}) \to (\tilde Y, \circledR_{\tilde Y})$, რომ

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "\pi_X"] & & \tilde{X} \arrow[dd, "\tilde{f}"] \arrow[dl, "\pi_{\tilde{X}}"'] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
Y \arrow[rr, "i_Y"'] \arrow[ur, "\pi_Y"'] & & \tilde{Y}. \arrow[ul, "\pi_{\tilde{Y}}"]
\end{tikzcd}$$

ამ შემთხვევაში $(i_X, i_Y): f \to \tilde{f}$ წყვილს ეწოდება ფენების შემნახველი f ასახვის B_0-ზე ფიბრანტული გაფართოება.

განმარტება 2.1.7. B_0 *სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია* $\mathbf{SSH_{B_0}}$ არის $\mathrm{R}: \mathbf{H}(\mathbf{CM_{B_0}}) \to \mathbf{H}(\mathbf{F_{B_0}})$ რეფლექტორის სრული ანასახი.

არსებობს კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}(\mathbf{CM_{B_0}}) \arrow[rr, "\mathrm{R}"] \arrow[dr, "\mathrm{SS_{B_0}}"'] & & \mathbf{H}(\mathbf{F_{B_0}}) \\
& \mathbf{SSH_{B_0}}. \arrow[ur, "\mathrm{J_R}"'] &
\end{tikzcd}$$

ამ დიაგრამის აგების თანახმად, ყოველი $(X, \circledR_X), (Y, \circledR_Y) \in ob(\mathbf{H}(\mathbf{CM_{B_0}}))$ სივრცისთვის

$$ob(\mathbf{SSH_{B_0}}) = ob(\mathbf{H}(\mathbf{CM_{B_0}})),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{SSH_{B_0}}}((X, \circledR_X), (Y, \circledR_Y)) = [(\tilde{X}, \circledR_{\tilde{X}}), (\tilde{Y}, \circledR_{\tilde{Y}})]_{\mathrm{B}_0},$$

$$\mathrm{SS_{B_0}}((X, \circledR_X)) = (X, \circledR_X)$$

და ყოველი B_0-ზე $f: (X, \circledR_X) \to (Y, \circledR_Y)$ ასახვის B_0-ზე

$$(i_X, i_Y): f \to \tilde{f}: (\tilde{X}, \circledR_{\tilde{X}}) \to (\tilde{Y}, \circledR_{\tilde{Y}})$$

ფიბრანტული გაფართოებისთვის

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}([f]_{\mathrm{B}_0}) = \mathrm{R}([f]_{\mathrm{B}_0}) = [\tilde{f}]_{\mathrm{B}_0}.$$

არსებობს კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}}) \arrow[rr, "\mathrm{R}"] \arrow[dr, "\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}"'] & & \mathbf{H}(\mathbf{F}_{\mathbf{B_0}}) \arrow[dl, "\mathrm{J}_{\mathrm{R}}"] \\ & \mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}. & \end{tikzcd}$$

2.2 კომპაქტურ-მეტრიზებად სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობების შესახებ

B_0-ზე $f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ ასახვის B_0-ზე ორმაგი ასახვის ცილინდრი $\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ არის B_0-ზე $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I$ სივრცის $X\times I\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{0,1\}$ ქვესივრცე.

ჯ.დიდაკისა და ს.ნოვაკის [Dy-N_1] მსგავსად ამ პარაგრაფში განმარტებულია ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.

განმარტება 2.2.1. *ფენების შემნახველ $f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ ასახვას ეწოდება ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა, თუ ყოველი $(P,\circledR_P)$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცისთვის $f^*:[Y,P]_{\mathrm{B}_0}\to[X,P]_{\mathrm{B}_0}$ არის ბიექცია. f ფიბრულ შეიპურ ექვივალენტობას ეწოდება ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა, თუ ყოველი ორი $g,h:(Y,\circledR_Y)\to(P,\circledR_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ ფენების შემნახველი ასახვისთვის $g\,f$ და $h\,f$ ასახვების მაკავშირებელი $H:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(P,\circledR_P)$ ფიბრული ჰომოტოპია არის $X\times\{0,1\}$-ის მიმართ ფიბრულად ჰომოტოპიური $H'(f\times 1_I)$ კომპოზიციისა, სადაც $H':(Y\times I,\circledR_{Y\times I})\to(P,\circledR_P)$ არის ფიბრული ჰომოტოპია g და h ასახვებს შორის.*

თეორემა 2.2.2. *ვთქვათ, $f:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა და $g:(\partial I^n\times Y,\circledR_{\partial I^n\times Y})\to(P,\circledR_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ B_0-ზე ისეთი ასახვა, რომ*

$g(1_{I^n} \times f):(I^n \times X,®_{I^n\times X}) \to (P,®_P)$ *კომპოზიცია გაგრძელებადია* $(I^n \times X,®_{I^n\times X})$ *სივრცემდე. მაშინ* g *ასახვას აქვს გაგრძელება* $(I^n \times X,®_{I^n\times X})$ *სივრცემდე.*

დამტკიცება. ასახვა $g:(\partial I^n \times Y,®_{\partial I^n\times Y}) \to (P,®_P)$ ინდუცირებს B_0-ზე ასახვას $(Y,®_Y)$ სივრციდან $(P^{\partial I^n},®_{P^{\partial I^n}})$ სივრცეში, რომელსაც ასევე $g:(Y,®_Y) \to (P^{\partial I^n},®_{P^{\partial I^n}})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

ვთქვათ, $h:(X,®_X) \to (P^{\partial I^n},®_{P^{\partial I^n}})$ არის gf კომპოზიციის ფიბრული გაგრძელება. თეორემის პირობის თანახმად f არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. აქედან გამომდინარე, არსებობს $h':(Y,®_Y) \to (P^{\partial I^n},®_{P^{\partial I^n}})$ B_0-ზე ასახვა, ისეთი რომ $h'f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h$. h' სიმბოლოთი კვლავ აღვნიშნოთ $h':(Y^n \times I,®_{Y^n\times I}) \to (P,®_P)$ B_0-ზე ასახვა ინდუცირებული h' ასახვით. $h'f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h$ მიმართებიდან და $h = gf$ გამომდინარეობს, რომ $h'f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} g \cdot f$. ამრიგად, $h'_{|\partial I^n\times Y} \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} g$. რადგან $(I^n \times Y, \partial I^n \times Y)$ წყვილს აქვს ფიბრული ჰომოტოპიის გავრცელების თვისება ამიტომ g გაგრძელებადია $I^n \times Y$ სივრცემდე. □

თეორემა 2.2.3. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X) \to (Y,®_Y)$ *არის* B_0*-ზე ასახვა. ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

1). f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა* ;

2). B_0*-ზე მოცემული* $(Z,®_Z)$ *სივრცის* B_0*-ზე* $(X,®_X)$ *ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის, ყოველი* $g:(Z,®_Z) \to (P,®_P) \in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ B_0*-ზე ასახვა გაგრძელებადია* $(Z \cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *სივრცემდე და ყოველი* B_0*-ზე ასახვა*

$$H:(Z \times I \cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)}) \to (P,®_P) \in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$$

გაგრძელებადია $((Z \cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)) \times I,®_{(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})$ *სივრცემდე;*

3). თუ $(X,®_X)$ არის $(Z,®_Z)$-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,®_Z) \to (Z \cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

და

$$j:(Z \times I \cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)}) \to ((Z \cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)) \times I,®_{(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})$$

ფიბრული ჩადგმები არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები;

4). თუ $(X,®_X)$ არის $(Z,®_Z)$-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,®_Z)\to(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა;

5). თუ $(X,®_X)$ არის $(Z,®_Z)$-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,®_Z)\to(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა;

6). ფიბრული ჩადგმები $k:(X,®_X)\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *და* $l:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})$ *არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები*;

7). *ყოველი* B_0*-ზე ასახვა გაგრძელებადია* $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *სივრცემდე და ყოველი* B_0*-ზე ასახვა*

$$H:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$$

გაგრძელებადია $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})$ *სივრცემდე.*

დამტკიცება. $1)\Rightarrow 2)$. ვთქვათ, $g:(Z,®_Z)\to(P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ არის B_0-ზე ასახვა. განვიხილოთ ფენების შემნახველი შემოსაზღვრის ასახვა $g_{|X}:(X,®_X)\to(P,®_P)$. ცხადია, ამ ასახვას აქვს ფიბრული გაგრძელება $g':(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(P,®_P)$. g' და g ასახვები ინდუცირებს B_0-ზე ასახვას $g'':(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(P,®_P)$, რომელიც g ასახვის ფიბრული გაგრძელება.

ვთქვათ, $q:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_X),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_X)})\to(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ ფიბრული ბუნებრივი პროექციაა და B_0-ზე ასახვა $f':(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_X),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_X)})\to(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_Y),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_Y)})$ ინდუცირებულია f ასახვით. შევნიშნოთ, რომ

$$Hq\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H'f'\,\mathrm{rel}\,X\times\{1\}\times\{0,1\},$$

სადაც $H':H_{|Y\times\{1\}\times\{0\}}\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H_{|Y\times\{1\}\times\{1\}}$ არის B_0-ზე ჰომოტოპია. აქედან გამომდინარე, H ასახვას აქვს ფიბრული გაგრძელება $(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I)$ სივრცემდე.

$2)\Rightarrow 3)$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი $P\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ სივრცისთვის $i_*:[Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),P]_{\mathrm{B}_0}\to [Z,P]_{\mathrm{B}_0}$ არის სურექციული ასახვა. ვაჩვენოთ, რომ i_* ინექციური ასახვაა.

ვთქვათ, $g,h:(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to (P,®_P)$ არის B_0-ზე ასახვები რაიმე ფიბრული ჰომოტოპიით

$$H:g_{|Z}\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h_{|Z}.$$

არსებობს B_0-ზე ასახვა $G:(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to (P,®_P)$, ისეთი, რომ

$$G_{|\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{0\}}=g,$$

და

$$G_{|\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{1\}}=h.$$

ვთქვათ, $G':(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})\to (P,®_P)$ არის G ფიბრული გაგრძელება. მაშინ $G':g\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $j_*:[(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I,P]_{\mathrm{B}_0}\to [Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),P]_{\mathrm{B}_0}$ არის ბიექცია ყოველი $(P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ სივრცისთვის. ვთქვათ, $G,H:((Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I,®_{(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})\to (P,®_P)$ არის B_0-ზე ასახვები, რომელთა შემოსაზღვრები $Z\times I\times \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ ნამრავლზე ფიბრულად ჰომოტოპიურია, ე.ი.

$$G_{|(Z\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times\{0\}}\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} H_{|(Z\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times\{0\}}.$$

რადგან $(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times\{0\}\to (Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I$ ფიბრული ჩადგმაა ამიტომ B_0-ზე ასახვები G და H არის B_0-ზე ჰომოტოპიური.

$3)\Rightarrow 4)$ ვთქვათ, $H:(Z\times I,®_{Z\times I})\to (P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ არის $g,h:(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to (P,®_P)$ B_0-ზე ასახვების $g_{|Z}$ და $h_{|Z}$ შემოსაზღვრებს შორის ფიბრული ჰომოტოპია. არსებობს H ფიბრული ჰომოტოპიის B_0-ზე გაგრძელება $G:(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to (P,®_P)$ ისეთი, რომ $G_{|\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{0\}}=g$ და $G_{|\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{1\}}=h$. iii) პირობის თანახმად არსებობს G ასახვის ფიბრული გაგრძელება

$G':((Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I,\circledR_{(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})\to (P,\circledR_P)$. ცხადია, $((Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I, Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f))$ წყვილს აქვს ფიბრული ჰომოტოპიის გავრცელების თვისება რაიმე B_0-ზე სივრცის მიმართ რადგანაც

$$(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I\times\{0\}$$

არის

$$(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\cup Y\times I)\times I\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I\times\{0\}$$

სივრის ფიბრული რეტრაქტი და ასევე,

$$(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\cup Y\times I)\times I\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I\times\{0\}$$

არის $(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I\times I$ სივრცის ფიბრული რეტრაქტი. აქედან გამომდინარე, G' არის g და h შორის ფიბრული ჰომოტოპია და G'-ს შემოსაზღვრა $Z\times I$-ზე ემთხვევა G.

$4)\Rightarrow 5)$. ამ იმპლიკაციის შემოწმება მარტივია.

$5)\Rightarrow 6)$. ვთქვათ, $Z=X\times I\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{0\}$. v) პირობის თანახმად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $X\times I\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{0\}\to \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. აქედან გამომდინარე, $\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\to \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}\times I$ ფიბრული ჩადგმა არის შეიპური ექვივალენტობა. ე.ი. $Z=X$ სივრცისთვის მივიღეთ, რომ $X\to \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ არის B_0-ზე ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა.

$6)\Rightarrow 7)$. ეს იპპლიკაცია სამართლიანია, რადგან $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),X)$ და $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f))$ სივრცეებს აქვთ ფიბრული ჰომოტოპიის გავრცელების თვისება რაიმე B_0-ზე სივრცის მიმართ.

$7)\Rightarrow 1)$. ვთქვათ, $H:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_X),\circledR_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_X)})\to (P,\circledR_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ ფიბრული ჰომოტოპიაა gf და hf ასახვებს შორის, სადაც $g,h:(Y,\circledR_Y)\to (P,\circledR_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ არის B_0-ზე ასახვები. არსებობს B_0-ზე ასახვა $G:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\circledR_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to (P,\circledR_P)$, ისეთი რომ $G_{Y\times\{0\}}=g$ და $G_{Y\times\{1\}}=h$. ვთქვათ, $G':(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,\circledR_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})\to (P,\circledR_P)$ არის G ჰომოტოპიის B_0-ზე გაგრძელება. $\circledR: X\times I\times I\to \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I$ ფიბრული პროექციის და $X\times I\times I$ ნამრავლის $X\times\{1\}\times I$

ნამრავლში ძლიერი ფიბრული დეფორმაციული რეტარქტის გამოყენებით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ H არის ფიბრული ჰომოტოპია $\mathrm{rel}X\times\{1\}\times\{0,1\}$-დან $H'\times(f\times 1_I)$-ში, სადაც $H':(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_Y),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(1_Y)})\to(P,®_P)$ არის g და h ასახვებს შორის ფიბრული ჰომოტოპია. ამრიგად, f არის ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. □

თეორემა 2.2.3-დან მიიღება შემდეგი წინადადებები.

შედეგი 2.2.4. *ვთქვათ,* $(X,®_X)$ *არის* B_0*-ზე სივრცე და* $A\subset X$. $i:(A,®_{X|A})\to(X,®_X)$ *ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* i *და*

$$j:(X\times\{0\}\cup A\times I\cup X\times\{1\},®_{X\times\{0\}\cup A\times I\cup X\times\{1\}})\to(X\times I,®_{X\times I})$$

ფიბრული ჩადგმები არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f=i$. ეს შედეგი ცალსახად გამომდინარეობს 1) და 6) პირობების ექვივალენტობიდან. □

შედეგი 2.2.5. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა, მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

დამტკიცება. $(X,®_X)$ სივრცე არის $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ ცილინდრის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი B_0-ზე. აქედან გამომდინარე, $(Y\times\{0\},®_{Y\times\{0\}})$ არის $\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$-ის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი. ამრიგად, ფიბრული ჩადგმები $(X,®_X)$-ისა $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$-ში და $(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ -ის $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I$ -ში არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობები. □

შედეგი 2.2.6. *თუ* $g:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის ფიბრულად ჰომოტოპიური* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობის, მაშინ* g *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

დამტკიცება. B_0-ზე ცილინდრი $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g)$ არის $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\mathrm{rel}X$-ის ფიბრულად ჰომოტოპიური. აქედან გამომდინარე, X სივრცეში ყოველი $(M,®_M)$ B_0-ზე სივრცისთვის, როგორც ჩაკეტილი სიმრავლისთვის, $M\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)$ და $Z\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g)$ B_0-ზე სივრცეები ფიბრულად ჰომოტოპიურია M-ის მიმართ. თეორემა 2.2.3-ის 1) და 5)

პირობების ექვივალენტობის თანახმად g არის ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. □

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

შედეგი 2.2.7. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *და* $g:(Y,®_Y)\to(Z,®_Z)$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები. მაშინ* $g\,f:(X,®_X)\to(Z,®_Z)$ *კომპოზიცია არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ $g\,f$ კომპოზიცია არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. ვთქვათ, $¨,\cdot:(Z,®_Z)\to(P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ არის ფენების შემნახველი ასახვები და $H:(X\times I,®_{X\times I})\to(P,®_P)$ ფიბრული ჰომოტოპიაა $H:¨\,gf\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}\cdot\,gf$. თეორემის პირობის თანახმად არსებობს ფენების შემნახველი ჰომოტოპია $H':(Y\times I,®_{Y\times I})\to(P,®_P)$ ფენების შემნახველ $¨\,g$ და $\cdot\,g$ ასახვებს შორის, ისეთი რომ

$$H\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H'(f\times 1_I)\mathrm{rel}\,X\times\{0,1\}.$$

ამრიგად, არსებობს $H'':(Z\times I,®_{Z\times I})\to(P,®_P)$ ფიბრული ჰომოტოპია $¨$ და $\cdot$ ასახვებს შორის, ისეთი რომ

$$H'\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H''(g\times 1_I)\mathrm{rel}Y\times\{0,1\}.$$

აქედან გამომდინარე, გვაქვს შემდეგი ფიბრული ჰომოტოპია

$$H\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H''(g\,f\times 1_I)\mathrm{rel}\,X\times\{0.1\}.$$ □

თეორემა 2.2.8. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *და* $g:(Y,®_Y)\to(Z,®_Z)$ *არის* B_0*-ზე ისეთი ასახვები, რომ* $g\,f$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა. თუ* f *და* g *ასახვებს შორის ერთერთი არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა, მაშინ ორივე* f *და* g *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები.*

დამტკიცება. თეორემის პირობიდან გამომდინარე f და g არის ფიბრულად ჰომოტოპიურები. ვთქვათ, H არის $(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$-დან $(P,®_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-ში რაიმე B_0-ზე ასახვა. არსებობს H ასახვის ფიბრული გაგრძელება

$$H':(X\times I\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{0,1\}\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g)\times\{0,1\},®_{X\times I\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times\{0,1\}\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g)\times\{0,1\}})\to(P,®_P)$$

რადგან $(Y,®_Y)\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g)})$ ფიბრული ჩადგმა ფიბრული შეიპური ექვივალენტობაა. [F]-ის შედეგი 2.5-ის თანახმად $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g)})$ არის $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g\,f),®_{(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g\,f)})$-ის ფიბრულად შეიპურად ექვივალენტული. აქედან გამომდინარე, $g\,f$ არის ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. ამრიგად, H' გაგრძელებადია $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(g))\times I$-ზე, და ასევე, $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I$-ზე. იმის გათვალისწინებით, რომ სამართლიანია $1)\Leftrightarrow 7)$ ექვივალენტობა მივიღებთ f არის ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა.

ახლა ვთქვათ, $H:(Y\times I,®_{Y\times I})\to(P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ არის $g\,¨$ და $g\,\cdot$ ასახვებს შორის ფიბრული ჰომოტოპია, სადაც $¨,\cdot:(Z,®_Z)\to(P,®_P)$. ცხადია, არსებობს ფიბრული ჰომოტოპია $H'':(Z\times I,®_{Z\times I})\to(P,®_P)$,ისეთი რომ $H'':¨\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}\cdot$, $H''(gf\times 1_I)\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H(f\times 1_I)\mathrm{rel}X\times\{0,1\}$. ვთქვათ, $G:(Y\times\partial I^2,®_{Y\times\partial I^2})\to(P,®_P)$ არის B_0-ზე ასახვა მოცემული შემდეგი ფორმულებით

$$G(y,0,t)=H(y,t),\, y\in Y, t\in I,$$

$$G(y,1,t)=H''(g(y),t),\, y\in Y, t\in I,$$

$$G(y,t,0)=¨\,g(y),\, y\in Y, t\in I,$$

$$G(y,t,1)=\cdot\,g(y),\, y\in Y, t\in I.$$

მაშინ $G(f\times 1_I):(X\times(\partial I^2),®_{X\times(\partial I^2)})\to(P,®_P)$ გაგრძელებადია მთელ $X\times I^2$ სივრცემდე. თეორემა 2.2.2-ის თანახმად G ასახვა გაგრძელებადია $Y\times I^2$-ზე. ამრიგად, მივიღებთ

$$H\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H''(g\times 1_I)\mathrm{rel}Y\times\{0,1\}. \qquad \square$$

შედეგი 2.2.9. *ვთქვათ,* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. თუ* $(X,®_X)$ *სივრცეს აქვს* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცის ფიბრული ჰომოტოპიური ტიპი, მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ არსებობს B_0-ზე ასახვა $g:(Y,\circledR_Y)\to(X,\circledR_X)$ ისეთი, რომ $g\,f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} 1_X$. თეორემა 2.2.8-ის თანახმად, $g\,f$ არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა. რადგან $g\,f$ ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობაა და f ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა, ამიტომ f და g ასახვები არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა. □

შემდეგი თეორემები, თეორემა 2.2.10 და თეორემა 2.2.11, გვიჩვენებს, რომ შესაძლებელია $\mathbf{SSH_{B_0}}$ კატეგორიის ძლიერი ფიბრული შეიპური იზომორფიზმების დახასიათება ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის ტერმინებში.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის მეშვეობით შესაძლებელია აღიწეროს $\mathrm{SSH}_{\mathrm{B}_0}$ კატეგორიის ფიბრული ძლიერი შეიპური იზომორფიზმები.

თეორემა 2.2.10. *ჩაკეტილი ფიბრული ჩადგმა* $i:(A,\circledR_{X|A})\to(X,\circledR_X)$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* i *არის* B_0*-ზე* SSDR*-ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ, i არის B_0-ზე SSDR-ასახვა. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ $i_*:[X,P]_{\mathrm{B}_0}\to[A,P]_{\mathrm{B}_0}, (P,\circledR_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ ბიექციაა. თეორემა 2.2.2-ის ა)$\Rightarrow$ბ) ექვივალენტობიდან გამომდინარეობს, რომ i_* არის სურექცია. რადგან ყოველი $f:(A,\circledR_{X|A})\to(P,\circledR_P)$ B_0-ზე ასახვისთვის არსებობს $\tilde{f}:(X,\circledR_X)\to(P,\circledR_P)$ B_0-ზე ასახვა ისეთი, რომ $\tilde{f}\,i=f$ და $i_*(\tilde{f})=f$. i_* B_0-ზე ასახვა ასევე არის ინექცია. მართლაც, ვთქვათ, $g,h:(X,\circledR_X)\to(P,\circledR_P)$ B_0-ზე ასახვებია ისეთი, რომ $i_*(h)=g=i_*(f)$, ე.ი. $hi \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} gi$. ბორსუკის ჰომოტოპიის გავრცელების შესახებ თეორემის [Y2] ფიბრული ვერსიის თანახმად არსებობს B_0-ზე ასახვები $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:(X,\circledR_X)\to(P,\circledR_P)$ ისეთი, რომ $\tilde{f}_{1|A}=f=\tilde{f}_{2|A}$, $\tilde{f}_1 \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} g$ და $\tilde{f}_2 \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h$. ა)$\Rightarrow$ბ) იმპლიკაციის თანახმად მივიღებთ $\tilde{f}_1 \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} \tilde{f}_2 \mathrm{rel}\, i(A)$. ამრიგად, $g \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h$. ადვილი საჩვენებელია, რომ $[q]_{\mathrm{B}_0}=[h]_{\mathrm{B}_0}$.

ახლა ვთქვათ, $H:(A\times I,®_{A\times I})\to(P,®_P)$ არის gi და hi შორის ფიბრული ჰომოტოპია. რადგან $(P^I,®_{P^I})\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, ამიტომ $i_*:[X,P^I]_{\mathrm{B}_0}\to[A,P^I]_{\mathrm{B}_0}$ ფუნქცია არის ბიექცია. აქედან გამომდინარე, ასევე $(i\times 1_I)_*:[X\times I,P]_{\mathrm{B}_0}\to[A\times I,P]_{\mathrm{B}_0}$ არის ბიექცია. ამრიგად, არსებობს B_0-ზე ასახვა $F:(X\times I,®_{X\times I})\to(P,®_P)$ და ფიბრული ჰომოტოპია $S:(i\times 1_I)_*(F)=F(i\times 1_I)\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H$. დავუშვათ, რომ $G=S\cup F:X\times I\times\{0\}\cup(A\times I)\times I\to(P,®_P)$ არის B_0-ზე ასახვა მოცემული შემდეგი ფორმულებით

$$G_{|X\times I\times\{0\}}=F,$$

$$G_{A\times I\times I}=S.$$

ბორსუკის ფიბრული ჰომოტოპიის გავრცელების თეორემის თანახმად არსებობს B_0-ზე ასახვა $\tilde G:(X\times I\times I,®_{X\times I})\to(P,®_Y)$ ისეთი, რომ $\tilde G_{|X\times I\times\{1\}}$ არის $\tilde g:(X,®_X)\to(P,®_P)$ და $\tilde h:(X,®_X)\to(P,®_P)$ ფიბრულ ასახვებს შორის ფიბრული ჰომოტოპია მოცემული შემდეგი ფორმულებით

$$\tilde g(x)=G(x,1,0),x\in X,$$

$$\tilde h(x)=\tilde G(x,1,1),x\in X,$$

$$\tilde g_{|A}=gi,$$

$$\tilde h_{|A}=hi.$$

[B,Tu$_1$]-ის თეორემა 3-ის თანახმად, არსებობს ფიბრული ჰომოტოპიები $T:g\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}\tilde g$ და $Q:\tilde h\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}h$.შემდეგი კომბინირებული ჰომოტოპია

$$L=T\cup\tilde G_{X\times I\times\{1\}}\cup Q:X\times I\times\{1\}\to(P,®_P)$$

არის g და h ასახვებს შორის ფიბრული ჰომოტოპია. შევნიშნოთ, რომ

$$L(i\times 1_I)\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H\,\mathrm{rel}\,A\times\{0,1\},$$

ე.ი. i არის ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა.

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება. ვთქვათ, i ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობაა. მაშინ i_* ბიექციაა. აქედან გამომდინარე, ყოველი $f:(A,®_{X|A})\to(P,®_P)$ B_0-ზე ასახვისთვის არსებობს B_0-ზე ასახვა $\tilde{F}:(X,®_X)\to(P,®_P)$ ისეთი, რომ $i_*(\tilde{F})=\tilde{F}i\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}f$.

ბორსუკის ფიბრული ჰომოტოპიის გავრცელების თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ არსებობს ფიბრული გაგრძელება $\tilde{f}:(X,®_X)\to(P,®_P)$, რომლისთვისაც $\tilde{f}\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}F$.

ვთქვათ, $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:(X,®_X)\to(P,®_P)$ არის f-ის ასეთი გაგრძელებები. მაშინ არსებობს ფიბრული ჰომოტოპია $H':\tilde{f}_1\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}\tilde{f}_2$, რომლისთვისაც

$$(i\times 1_Y)H'\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}H:f\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}f\,\mathrm{rel}A\times\{0,1\}.$$

ამრიგად, თეორემა 2.2.2-ის ბ)$\Rightarrow$ა) იმპლიკაციის თანახმად, i არის B_0-ზე SSDR-ასახვა. □

თეორემა 2.2.11. *ვთქვათ* $f:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ *არის* B_0*-ზე კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეებს შორის ფენების შემნახველი ასახვა, ხოლო* $(i_X,i_Y):f\to\tilde{f}$ *არის* f *ასახვის ფიბრანტული გაფართოება* B_0*-ზე. მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\tilde{f}$ *არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა.*

დამტკიცება. ცნობილია, რომ $f=pi$, სადაც $i:(X,®_X)\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ და $p:(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(Y,®_Y)$ შესაბამისად არის კოფიბრაცია და B_0-ზე ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა. ვთქვათ, $i_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)}:(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),®_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(\tilde{Z},®_{\tilde{Z}})$ არის f ასახვის ცილინდრის B_0-ზე ფიბრანტული გაგრძელება. არსებობს B_0-ზე ასახვები $\tilde{i}:(\tilde{X},®_{\tilde{X}})\to(\tilde{Z},®_{\tilde{Z}})$ და $\tilde{p}:(\tilde{Z},®_{\tilde{Z}})\to(\tilde{Y},®_{\tilde{Y}})$ ისეთი, რომ $i_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)}i=\tilde{i}\,i_X$ და $i_Y\,p=\tilde{p}i_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)}$.

ვთქვათ, f არის ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა, როგორც განმარტება 2.2.1-შია. რადგან p არის ფიბრული ჰოოტოპიური ექვივალენტობა, ამიტომ ის ასევე

ძლიერი შეიპური ექვივალენტობაა. ამრიგად, $f = pi$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ i არის ძლიერი ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. თეორემა 2.2.10-ის თანახმად i არის B_0-ზე SSDR -ასახვა. აქედან გამომდინარე, $\tilde{i}$ ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობაა. ამრიგად, $\tilde{p}\tilde{i}$ კომპოზიცია, არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა. შევნიშნოთ, რომ $\tilde{p}\tilde{i}$ და $\tilde{f}$ არის f ასახვის B_0-ზე გაგრძელებები. ცხადია, $\tilde{p}\tilde{i} \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} \tilde{f}$. აქედან გამომდინარე, $\tilde{f}$ B_0-ზე ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობაა.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $\tilde{f} : (\tilde{X}, ®_{\tilde{X}}) \to (\tilde{Y}, ®_{\tilde{Y}})$ არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა, მაშინ f ძლიერი შეიპური ექვივალენტობაა. შევნიშნოთ, რომ ყოველი $P \in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ -თვის $\tilde{f}_* : [\tilde{Y}, P]_{\mathrm{B}_0} \to [\tilde{X}, P]_{\mathrm{B}_0}, (i_X)_* : [\tilde{X}, P]_{\mathrm{B}_0} \to [X, P]_{\mathrm{B}_0}$ და $(i_{\tilde{Y}})_* : [\tilde{Y}, P]_{\mathrm{B}_0} \to [Y, P]_{\mathrm{B}_0}$ ბიექციებია. რადგან $(f)_*(i_Y)_* = (i_X)_* \tilde{f}_*$, ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ f_* ასევე არის ბიექცია. ცხადია, B_0-ზე სივრცე $P^I_{\mathrm{B}_0}$ არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე. ამრიგად, $f_* : [Y, P^I_{\mathrm{B}_0}]_{\mathrm{B}_0} \to [X, P^I_{\mathrm{B}_0}]_{\mathrm{B}_0}$ ბიექციაა.

ვთქვათ, $H : g f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h f$ ფიბრული ჰომოტოპიაა, სადაც $f, g : (Y, ®_Y) \to (P, ®_P)$ B_0-ზე ასახვებია. მაშინ არსებობს B_0-ზე ასახვა $H' : (Y \times I, ®_{Y \times I}) \to (P, ®_P)$ ისეთი, რომ $H'(f \times 1_I) \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} H.$

თეორემა 2.2.3-ის მტკიცების მსგავსად $i : (f(X), ®_{Y|f(X)}) \to (Y, ®_Y)$ ფიბრული ჩადგმისთვის შეგვიძლია ავაგოთ ფიბრული ჰომოტოპია $\tilde{H} : g \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h$, რომლისთვისაც $\tilde{H}(f \times 1_I) \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} H$. ამრიგად, f არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა განმარტება 2.2.1-ის შესაბამისად. □

შედეგი 2.2.12. B_0-*ზე კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეებს შორის ფენების შემნახველი ასახვა* f *არის 2.2.1 განმარტების თვალსაზრისით ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}([\mathrm{f}]_{\mathrm{B}_0})$ *არის* $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ *კატეგორიის იზომორფიზმი.* □

თავი 3

ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია

აგებული და განვითარებული გვაქვს ფიქსირებული მეტრიზებადი B_0 სივრცის მიმართ განხილული ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეების ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია. აქ განხილული მიდგომა წარმოადგენს მარდეჟიჩ-ლისიცას მეთოდის განზოგადებას და ის მარდეჟიჩის მიერ შემოტანილი რეზოლვენტების ნაცვლად იყენებს რეზოლვენტის ფიბრულ ვერსიას. ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია გვაძლევს B_0-ზე სივრცეების ისეთ კლასიფიკაციას, რომელიც არის უფრო სუსტი ვიდრე ფიბრული ჰომოტოპიური თეორიის მიერ ინდუცირებული B_0-ზე სივრცეების კლასიფიკაცია, მაგრამ არის უფრო ძლიერი ვიდრე ჩვეულებრივი ფიბრული შეიპური თეორიის მიერ წარმოქმნილი B_0-ზე სივრცეთა კლასიფიკაცია.

3.1 $\mathbf{B_0}$-ზე სივრცეთა რეზოლვენტები და ძლიერი გაფართოებები

ვთქვათ $\mathcal{U}=\{U_\sim\}_{\sim\in A}$ არის B_0-ზე $(Y,\circledR_Y)$ სივრცის დაფარვა. ვიტყვით, რომ $f,g:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვები არის $\mathcal{U}$-მახლობელი, თუ ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_\sim\in\mathcal{U}$ ელემენტი, რომ $f(x),g(x)\in U_\sim$. ასევე, ვიტყვით, რომ $H:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y,\circledR_Y)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს f და g ასახვებს, არის $\mathcal{U}$-ფიბრული ჰომოტოპია, თუ ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_\sim\in\mathcal{U}$ ელემენტი, რომ ნებისმიერი $t\in I$ რიცხვისთვის $H(x,t)\subseteq U_\sim$.

წინადადება 3.1.1. *ვთქვათ* $(Y,\circledR_Y)$ *არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *-სივრცე. მაშინ* $(Y,\circledR_Y)$ *სივრცის ყოველი* $\mathcal{U}$ *ღია დაფარვისთვის არსებობს* $(Y,\circledR_Y)$ *სივრცის ისეთი* $\mathcal{V}$ *ღია დაფარვა, რომ როცა ორი*

$f,g:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვა ნებისმიერ $(X,\circledR_X)$ ტოპოლოგიური სივრციდან $(Y,\circledR_Y)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში არის $\mathcal{V}$ -მახლობელი, მაშინ არსებობს f და g ასახვების მაკავშირებელი ფენების შემნახველი $\mathcal{U}$ -ჰომოტოპია $H:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y,\circledR_Y)$. გარდა ამისა, თუ $A\subseteq X$ ქვესიმრავლისათვის $f_{|A}=g_{|A}$, მაშინ H არის ფენების შემნახველი ჰომოტოპია A ქვესივრცის მიმართ.

დამტკიცება. შეიძლება დავუშვათ, რომ $(Y,\circledR_Y)$ არის $\mathrm{B}_0\times K$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე, სადაც K არის ნორმირებული ვექტორული L სივრცის ამოზნექილი სიმრავლე. ვთქვათ, $\circledR:\mathrm{B}_0\times K\to K$ ასახვა მოცემულია ფორმულით $\circledR(b,k)=k$ ყოველი $(b,k)\in\mathrm{B}_0\times K$ წვილისთვის. რადგან $(Y,\circledR_Y)$ არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ -სივრცე, ამიტომ $\mathrm{B}_0\times K$ სივრცეში არსებობს $(Y,\circledR_Y)$ სივრცის $(G,\circledR_G)$ ღია მიდამო $r:(G,\circledR_G)\to(Y,\circledR_Y)$ ფენობრივი რეტრაქციით. ვთქვათ $\{O_{\sim}\times Q_{\sim}\}_{\sim\in\mathscr{A}}$ დაფარვა ჩაწერილია $r^{-1}(\mathcal{U})$ დაფარვაში, სადაც ყოველი $\sim\in\mathscr{A}$ ელემენტისთვის $Q_{\sim}$ არის ამოზნექილი სიმრავლე. მაშინ $\mathcal{V}=\{(O_{\sim}\times Q_{\sim})\cap Y\}_{\sim\in\mathscr{A}}$ არის $\mathcal{U}$ დაფარვაში ჩაწერილი ღია დაფარვა. ყოველი ორი $f,g:(X,\circledR_X)\to(Y,\circledR_Y)\subseteq\mathrm{B}_0\times K$ $\mathcal{V}$ -მახლობადი ფენების შემნახველი ასახვისთვის შეგვიძლია განვმარტოთ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია $H':(X\times I,\circledR_{X\times I})\to K$ შემდეგი ფორმულით

$$H'(x,t)=(\circledR_X(x),(1-t)\circledR(f(x))+t\circledR(g(x)),\qquad (x,t)\in X\times I.$$

განვიხილოთ ფენების შემნახველი ასახვა $H:(X\times I,\circledR_{X\times I})\to(Y,\circledR_Y)$ მოცემული

$$H(x,t)=r(H'(x,t)),\qquad (x,t)\in X\times I.$$

ფორმულით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $H_0=f$, $H_1=g$ და H არის $\mathcal{U}$ -ჰომოტოპია. ცხადია, თუ ყოველი $x\in A$ წერტილისთვის $f(x)=g(x)$, მაშინ $H(x,t)=f(x)=g(x)$ ყოველი $t\in I$ რიცხვისთვის. □

$\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის შებრუნებული სისტემა $\mathbf{X}=((X_{\sim},\circledR_{X_{\sim}}),p_{\sim\sim'},\mathscr{A})$ შედგება $\mathscr{A}$ ინდექსთა მიმართული სიმრავლისაგან, ყოველი $\sim\in\mathscr{A}$ ინდექსის შესაბამისი B_0-ზე

$(X_{\sim}, ®_{X_{\sim}})$ სივრცისაგან და ნებისმიერი $\sim \le \sim'$ ინდექსთა წყვილის შესაბამისი ისეთი ფენების შემნახველი $p_{\sim\sim'} : (X_{\sim'}, ®_{X_{\sim'}}) \to (X_{\sim}, ®_{X_{\sim}})$ ასახვებისაგან, რომ $p_{\sim\sim'}\, p_{\sim'\sim''} = p_{\sim\sim''}$ და $p_{\sim\sim} = 1_{X_{\sim}}$, $\sim \in \mathscr{A}$.

$\mathbf{Top_{B_0}}$ კატეგორიის შებრუნებულ სისტემებს შორის მორფიზმი $(f\ , ¨) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y} = ((Y\ , ®_Y\ ), q\ \ ', \mathscr{B})$ შედგება $¨ : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ ფუნქციისაგან, ყოველი $\in \mathscr{B}$ ინდექსის შესაბამისი $f\ : (X_{¨(\ )}, ®_{X_{¨(\ )}}) \to (Y\ , ®_Y\ )$ ფენების შემნახველი ასახვისაგან და აკმაყოფილებს პირობას: ნებისმიერი $\le\ '$ ინდექსთა წყვილისთვის არსებობს ისეთი $\sim \ge ¨(\ ), ¨(\ ')$ იდექსი, რომ სრულდება ტოლობა

$$f\ \ p_{¨(\ )} = q\ \ '\, f\ '\, p_{¨(\ ')\sim} .$$

ორ მორფიზმს $(f\ , ¨), (g\ , \cdot\ ) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ვუწოდებთ ექვივალენტურს, $f \underset{B_0}{\simeq} g$, თუ ნებისმიერი $\in \mathscr{B}$ ინდექსისთვის არსებობს ისეთი $\sim \in \mathscr{A}$ ინდექსი, რომ $\sim \ge ¨(\ ), \cdot(\ )$, და $f\ \ p_{¨(\ )\sim} = g\ \ p_{\cdot(\ )\sim}$.

ვთქვათ, $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ არის კატეგორია, რომლის ობიექტებია $\mathbf{Top_{B_0}}$ კატეგორიის $\mathbf{X}$ შებრუნებული სისტემები, ხოლო მორფიზმები არის $\underset{B_0}{\simeq}$ ექვივალენტობის მიმართ $(f\ , ¨) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ მორფიზმის ექვივალენტობის კლასები, რომელსაც აღვნიშნავთ $\mathbf{f}$ სიმბოლოთი.

$\mathbf{p} = (p_{\sim}) : (X, ®_X) \to \mathbf{X} = ((X_{\sim}, ®_{X_{\sim}}), p_{\sim\sim'}, \mathscr{A})$ მორფიზმი $((X, ®_X))$ ელემენტარული შებრუნებული სისტემიდან $\mathbf{X}$ შებრუნებულ სისტემაში შედგება ყოველი $\sim \in \mathscr{A}$ ინდექსის შესაბამისი ისეთი ფენების შემნახველი $p_{\sim} : (X, ®_X) \to (X_{\sim}, ®_{X_{\sim}})$ ასახვებისგან, რომ $p_{\sim} = p_{\sim\sim'}\, p_{\sim'}$, $\sim \le \sim'$.

განმარტება 3.1.2. (იხ. $[B_4]$-$[B_6]$). *ვთქვათ,* $(X, ®_X)$ B_0-*ზე სივრცეა და* $\mathbf{X} = ((X_{\sim}, ®_{X_{\sim}}), p_{\sim\sim'}, \mathscr{A})$ *არის* $\mathbf{Top_{B_0}}$ *კატეგორიის შებრუნებული სისტემა. ვიტყვით, რომ* $\mathbf{p} : (X, ®_X) \to \mathbf{X}$ *არის* B_0-*ზე* $(X, ®_X)$ *სივრცის* B_0-*ზე რეზოლვენტა ან ფიბრული რეზოლვენტა, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*

$\mathbf{R_{B_0}1)}$. *ვთქვათ, $(P,®_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, $\mathcal{U}$ არის $(P,®_P)$ სივრცის ღია დაფარვა და $h:(X,®_X)\to(P,®_P)$ ფენების შემნახველი ასახვაა. მაშინ არსებობს ისეთი $\sim\in\mathscr{A}$ ინდექსი და ისეთი $f:(X_\sim,®_{(P,®_P)})\to(P,®_P)$ ფენების შემნახველი ასახვა, რომ h და $f\,p_\sim$ არის $\mathcal{U}$-მახლობადი.*

$\mathbf{R_{B_0}2)}$. *ვთქვათ, $(P,®_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ და $\mathcal{U}$ არის $(P,®_P)$-ის ღია დაფარვა. მაშინ არსებობს $(P,®_P)$-ის ისეთი $\mathcal{U}'$ ღია დაფარვა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებას: თუ $\sim\in\mathscr{A}$ და $f,f':(X,®_X)\to(P,®_P)$ არის ფენების შემნახველი ისეთი ასახვები, რომ $f\,p_\sim$ და $f'\,p_\sim$ არიან $\mathcal{U}'$-მახლობადი, მაშინ არსებობს ისეთი $\sim'\geq\sim$ ინდექსი, რომ $f\,p_{\sim\sim'}$ და $f'\,p_{\sim\sim'}$ ფენების შემნახველი ასახვები არიან $\mathcal{U}$-მახლობადი.*

თუ $(X,®_X)$ B_0-ზე სივრცის $\mathbf{p}:(X,®_X)\to\mathbf{X}=((X_\sim,®_{X_\sim}),p_{\sim\sim'},\mathscr{A})$ ფიბრულ რეზოლვენტაში ყოველი $(X_\sim,®_{X_\sim})$ არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე, მაშინ ვიტყვით, რომ $\mathbf{p}$ არის ფიბრული $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტა.

ვ.ბალაძის შემდეგი თეორემა ([B_4]-[B_6]) აუცილებელია B_0-ზე ნებისმიერ სივრცეთა კატეგორიისთვის ძლიერი ფიბრული შეიპური თეორიის აგებისთვის.

თეორემა 3.1.4. B_0 მეტრიკულ სივრცეზე ნებისმიერი $(X,®_X)$ არსებობს B_0-ზე $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტა. □

განმარტება 3.1.4.(ვ.ბალაძე, იხ. [B_5]). *ვთქვათ $(X,®_X)$ არის B_0-ზე სივრცე, $\mathbf{X}=((X_\sim,®_{X_\sim}),p_{\sim\sim'},\mathscr{A})$ $\mathbf{Top_{B_0}}$ კატეგორიის შებრუნებული სისტემა, ხოლო $\mathbf{p}=(p_\sim):(X,®_X)\to\mathbf{X}$ $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმი. $\mathbf{p}$ მორფიზმს ეწოდება B_0-ზე $(X,®_X)$ სივრცის ფიბრული გაფართოება, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*

$\mathbf{E_{B_0}1)}$. *ყოველი $(P,®_P)$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცისთვის და $f:(X,®_X)\to(P,®_P)$ ფენების შემნახველი ასახვისთვის არსებობს ისეთი $\sim\in\mathscr{A}$ ინდექსი და ისეთი $h:(X_\sim,®_{X_\sim})\to(P,®_P)$ ფენების შემნახველი ასახვა, რომ $h\,p_\sim\underset{\mathrm{B}_0}{\simeq}f$.*

$\mathbf{E}_{\mathbf{B_0}}$ 2). *თუ* $f, f' : (X_\sim, \circledR_{X_\sim}) \to (P, \circledR_P)$ *არის ფენების შემნახველი ასახვები,* $(P, \circledR_P) \in \mathrm{ANR}_{B_0}$ *და* $f\, p_\sim \underset{B_0}{\simeq} f'\, p_\sim$ *, მაშინ არსებობს ისეთი* $\sim' \geq \sim$ *ინდექსი, რომ* $f\, p_{\sim\sim'} \underset{B_0}{\simeq} f'\, p_{\sim\sim'}$ *.*

განმარტება 3.1.5. $\mathbf{p} : (X, \circledR_X) \to ((X_\sim, \circledR_{X_\sim}), p_{\sim\sim'}, \mathscr{A})$ *მორფიზმს ეწოდება* B_0*-ზე ძლიერი გაფართოება, თუ ის აკმაყოფილებს* $\boldsymbol{E}_{\mathbf{B_0}}$ **1)** *და შემდეგ პირობებს:*

$\mathbf{SE}_{\mathbf{B_0}}$ 2). *ვთქვათ* $(P, \circledR_P)$ *არის* ANR_{B_0}*-სივრცე,* $f_0, f_1 : (X_\sim, \circledR_{X_\sim}) \to (P, \circledR_P)$, $\sim \in \mathscr{A}$ *ფენების შემნახველი ასახვები, ხოლო* $F : (X \times I, \circledR_{X \times I}) \to (P, \circledR_P)$ *ისეთი ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ* $S(x, 0) = f_0 p_\sim(x), \quad x \in X$,

$$S(x,1) = f_1 p_\sim(x), \quad x \in X.$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\sim' \geq \sim$ *ინდექსი და* $H : (X_{\sim'} \times I, \circledR_{X_{\sim'} \times I}) \to (P, \circledR_P)$ *ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ*

$$H(x,0) = f_0 p_{\sim\sim'}(z), \quad z \in X_{\sim'},$$

$$H(x,1) = f_1 p_{\sim\sim'}(z), \quad z \in X_{\sim'},$$

$$H(p_{\sim'} \times 1_I) \underset{B_0}{\simeq} S(\mathrm{rel}(X \times \partial I)).$$

ცხადია, რომ ყოველი B_0-ზე ძლიერი გაფართოება არის B_0-ზე გაფართოება.

თუ ყოველი $X_\sim \in \mathrm{ANR}_{B_0}$, მაშინ $\mathbf{p}$ გაფართოებას B_0-ზე და ძლიერ გაფართოებას B_0-ზე ეწოდება ANR_{B_0}-გაფართოება და ძლიერი ANR_{B_0}-გაფართოება, შესაბამისად.

პარაგრაფ 3.1-ის ერთერთი მთავარი შედეგია შემდეგი

თეორემა 3.1.6. *ვთქვათ* $(X, \circledR_X)$ *არის ტოპოლოგიური სივრცე* B_0*-ზე. მაშინ ყოველი* B_0*-ზე რეზოლვენტა* $\mathbf{p} : (X, \circledR_X) \to \mathbf{X}$ *ინდუცირებს* B_0*-ზე* ANR_{B_0}*-გაფართოებას.* □

შედეგი 3.1.7. *ყოველი* B_0*-ზე* ANR_{B_0}*-რეზოლვენტა ინდუცირებს* B_0*-ზე* ANR_{B_0}*-გაფართოებას.* □

შედეგი 3.1.8. *ყოველი* B_0*-ზე* $(X, \circledR_X)$ *სივრცისთვის არსებობს კოსასრული ძლიერი* ANR_{B_0}*-გაფართოება.* □

თეორემა 3.1.6-ის დამტკიცება მიმდინარეობს შემდეგი ლემების გამოყენებით.

ლემა 3.1.9. *ვთქვათ* $(X,®_X)$ *არის ტოპოლოგიური სივრცე* B_0 *მეტრიზებად სივრცეზე,* $(P,®_P)$, $(P',®_{P'})$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *-სივრცეები,* $f:(X,®_X)\to(P',®_{P'})$, $h_0,h_1:(P',®_{P'})\to(P,®_P)$ ფენების შენახველი ასახვები, ხოლო $S:(X\times I,®_{X\times I})\to(P,®_P)$ ისეთი ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$S(x,0)=h_0 f(x),\quad x\in X,$$

$$S(x,1)=h_1 f(x),\quad x\in X.$$

მაშინ არსებობს ისეთი $(P'',®_{P''})$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე, $f':(X,®_X)\to(P'',®_{P''})$, $h:(P'',®_{P''})\to(P',®_{P'})$ ფენების შემნახველი ასახვები და $K:(P''\times I,®_{P''\times I})\to(P,®_P)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$h f'=f,$$

$$K(z,0)=h_0 h(z),\quad z\in P'',$$

$$K(z,1)=h_1 h(z),\quad z\in P'',$$

$$K(f'\times 1_I)=S.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $S:(X\times I,®_{X\times I})\to(P,®_P)$ ისეთი ასახვაა, რომ $S(x,0)=(h_0 f)(x)$, $S(x,1)=(h_1 f)(x)$ და $®_P S=®_{X\times I}$. განვიხილოთ $C(I,P)$ სივრცის $C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$ ქვესივრცე. ვთქვათ, $®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}:C_{\mathrm{B}_0}(I,P)\to\mathrm{B}_0$ ასახვა მოცემულია შემდეგი

$$®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(¨)=®_P(¨(t)).$$

აქედან გამომდინარე, $C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$ არის B_0-ზე სივრცე. ფენების შემნახველი ასახვა $S:(X\times I,®_{X\times I})\to(P,®_P)$ განსაზღვრავს ისეთ ასახვას $s:(X,®_X)\to C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$, რომ $(s(x))(t)=S(x,t)$, $x\in X$, $t\in I$. $x\in X$ წერტილის ანასახი $s(x)\in C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$, რადგან $®_P\, s(x):I\to\mathrm{B}_0$ არის მუდმივი ასახვა. მართლაც,

$$(®_P\, s(x))(t)=®_P(s(x))(t)=®_P(S(x,t))=®_{X\times I}(x,t)=®_X(x)$$

ყოველი $t\in I$ რიცხვისთვის.

ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის გვაქვს

$$(®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}\, s)(x)=(®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(s(x))=®_P(s(x))(t)=$$
$$=®_P(S(x,t))=®_{X\times I}(x,t)=®_X(x).$$

ამრიგად, $®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}\, s = ®_X$. აქედან გამომდინარე, $s:(X,®_X) \to C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$ არის ფენების შემნახველი ასახვა. ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის გვაქვს

$$(s(x))(0) = S(x,0) = (h_0\, f)(x)$$

და

$$(s(x))(1) = S(x,1) = (h_1\, f)(x).$$

ვთქვათ, $P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P) = \{(y,¨) \mid ®_{P'}(y) = ®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(¨)\}$. ასახვა $f':(X,®_X) \to P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$, მოცემული $f'(x) = (f(x), s(x))$ ფორმულით არის ფენების შემნახველი ასახვა. ვთქვათ, $®_{P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P)} : P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P) \to \mathrm{B}_0$ ასახვა განმარტებულია შემდეგნაირად

$$®_{P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(y,¨) = ®_{P'}(y) = ®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(y).$$

მაშინ მივიღებთ

$$®_{P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}\, f' = ®_{P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(f(x), s(x)) = ®_{P'}(f(x)) = ®_X(x).$$

ამრიგად, $®_X = ®_{P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}\, f'$.

ცხადია, რომ პირველი პროექცია $h: P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P) \to (P', ®_{P'})$ არის ფენების შემნახველი ასახვა და $h\, f' = f$.

განვიხილოთ $P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$ -ის $(P'', ®_{P''})$ ქვესიმრავლე შემდეგი გზით:

$$P'' = \{(y,¨) \in P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P) \mid ¨(0) = h_0(y), h_1(y) = ¨(1)\}.$$

ვთქვათ, $K: P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I,P) \times I \to P$ ასახვა მოცემულია ფორმულით

$$K((y,¨),t) = ¨(t), y \in P', ¨ \in C_{\mathrm{B}_0}(I,P), t \in P.$$

K ასახვის შემოსაზღვრა $(P'' \times I, ®_{P'' \times I})$ -ზე კვლავ აღვნიშნოთ $K:(P'' \times I, ®_{P'' \times I}) \to (P, ®_P)$ სიმბოლოთი. ეს ასახვა არის ფენების შემნახველი ჰომოტოპია $h_0\, h_{|P''}$ და $h_1\, h_{|P''}$ ასახვებს შორის.

მართლაც, ყოველი $(y,¨) \in P''$ წყვილისთვის და $t \in I$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$K((y,¨),0)=¨(0)=h_0(y)=h_0\,h(y,¨),$$
$$K((y,¨),1)=¨(1)=h_1(y)=h_1\,h(y,¨),$$
$$®_{P'\times_{\mathrm{B}_0}C_{\mathrm{B}_0}(I,P)\times I}((y,¨),t)=®_{P'\times_{\mathrm{B}_0}C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(y,¨)=$$
$$=®_{P'}(y)=®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(¨)=®_P(¨(t))=®_P(K(y,¨),t).$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის და $t\in I$ რიცხვისთვის

$$K(f'\times 1_I)(x,t)=K((f(x),s(x)),t)=(s(x))(t)=(S(x,t)).$$

აქედან გამომდინარე, $K(f'\times 1_I)=S$.

დავამტკიცოთ, რომ $(P'',®_{P''})\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$. ახლა დავუშვათ, რომ A არის Z B_0-ზე სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე და $l:A\to P''$ არის ისეთი ასახვა, რომ $®_A=®_{Z|A}=®_P\,l$.

$L:(A\times I,®_{A\times I})\to(P,®_P)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ასახვა გამნარტებული შემდეგი

$$L(a,t)=(h'\,l(a))(t),(a,t)\in A\times I,$$

სადაც h' არის მეორე პროექცია $P'\times_{\mathrm{B}_0}C_{\mathrm{B}_0}(I,P)\to C_{\mathrm{B}_0}(I,P)$. ცხადია, რომ L ფენების შემნახველი ასახვაა. მართლაც,

$$(®_P\,L)(a,t)=®_P(L(a,t))=®_P((h'\,l(a))(t)=$$

$$=®_{C_{\mathrm{B}_0}(I,P)}(h'(l(a)))=®_A(a)=®_{A\times I}(a,t).$$

L არის ფენების შემნახველი ჰომოტოპია $h_0\,h\,l$ და $h_1\,h\,l$ ასახვებს შორის. მართლაც,

$$L(a,0)=(h'\,l(a))(0)=h_0\,h\,l(a),\quad a\in A$$

და

$$L(a,1)=(h'\,l(a))(1)=h_1\,h\,l(a),\quad a\in A.$$

შევნიშნოთ, რომ რადგან $(P',®_{P'})\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ და $h\,l:(A,®_A)\to(P',®_{P'})$ ასახვები არის ფენების შემნახველი, ამიტომ არსებობს A-ს U ღია მიდამო Z-ში და ფენების შემნახველი ასახვა $\tilde{l}':(U,®_U)\to(P',®_{P'})$ ისეთი, რომ $\tilde{l}'_{|A}=h\,l$.

არსებობს A ქვესივრცის V ღია მიდამო U-ში და ფენების შემნახველი ჰომოტოპია $\tilde{L}:(V\times I,®_{V\times I})\to(P,®_P)$ $h_0\,\tilde{l}'_{|V}$ და $h_1\,\tilde{l}'_{|V}$ ასახვებს შორის. ასევე შევნიშნოთ, რომ ყოველი $a\in A$ წერტილისთვის და $t\in I$ რიცხვისთვის $\tilde{L}(a,t)=L(a,t)$. ვთქვათ, $\tilde{l}''$ არის ფენების

შემნახველი ასახვა $\tilde{l}'' : (V, ®_V) \to C_{\mathrm{B}_0}(I, P)$, მოცემული $(\tilde{l}''(z))(t) = \tilde{L}(z,t)$, $z \in V, t \in I$. ყოველი $a \in A$ წერტილისთვის გვაქვს

$$(\tilde{l}''(a))(t) = \tilde{L}(a,t) = L(a,t) = (h' \, l(a))(t).$$

აქედან გამომდინარე, $\tilde{l}''_{|A} = h' l$. ახლა განვმარტოთ ფენების შემნახველი ასახვა $\tilde{l} : (V, ®_V) \to P' \times_{\mathrm{B}_0} C_{\mathrm{B}_0}(I, P)$ შემდეგი ფორმულით

$$\tilde{l}(z) = (\tilde{l}', \tilde{l}''), \; z \in V.$$

ყოველი $z \in V$ წერტილისთვის გვაქვს

$$(\tilde{l}''(z))(0) = \tilde{L}(z,0) = h_0 \, \tilde{l}'(z),$$

$$(\tilde{l}''(z))(1) = \tilde{L}(z,1) = h_1 \, \tilde{l}'(z).$$

აქედან გამომდინარე, $\tilde{l} : (V, ®_V) \to (P'', ®_{P''})$ არის $l : (A, ®_A) \to (P'', ®_{P''})$ ფენების შემნახველი ასახვის გაგრძელება. ეს ფაქტი სრულად ავსებს ლემა 3.1.9-ის მტკიცებას. □

ლემა 3.1.11. *ვთქვათ,* $\mathbf{p} : (X, ®_X) \to \mathbf{X}$ *არის რეზოლვენტა* B_0 *-ზე, ხოლო* $\sim, (P, ®_P), f_0, f_1$ *და* S *შესაბამისად არის ისეთი ინდექსი,* B_0 *-ზე სივრცე და ფენების შემნახველი ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებს* $\mathbf{SE_{B_0}}$ **2)** *პირობის მოთხოვნებს, მაშინ* $(P, ®_P)$ *სივრცის ყოველი* $\mathcal{U}$ *ღია დაფარვისთვის არსებობს ისეთი* $\sim' \geq \sim$ *ინდექსი და ისეთი ფენების შემნახველი* $H : (X_{\sim'} \times I, ®_{X_{\sim'} \times I}) \to (P, ®_P)$ *ჰომოტოპია, რომ*

$$H(y,0) = f_0 \, p_{\sim\sim'}(y), \qquad y \in X_{\sim'},$$

$$H(y,1) = f_1 \, p_{\sim\sim'}(y), \qquad y \in X_{\sim'},$$

$$(S, H(1 \times p_{\sim})) \leq \mathcal{U}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\mathcal{U}$ არის $(P, ®_P)$-ის ღია დაფარვა. არსებობს $\mathcal{U}$ დაფარვის ვარსკვლავურად-ჩაწერილი $\mathcal{U}'$ ღია დაფარვა. ახლა შევარჩიოთ $(P, ®_P)$-ს ისეთი $\mathcal{V}$ ღია დაფარვა, რომ $\mathcal{U}'$ ღია დაფარვისთვის სრულდება წინადადება 3.1.1-ის მოთხოვნები. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\mathcal{V}$ არის $\mathcal{U}'$-ის ვარსკვლავურად ჩაწერილი დაფარვა. შევარჩიოთ $\mathcal{V}'$ ღია დაფარვა ისე, რომ $\mathcal{V}'$ იყოს $\mathcal{V}$-ს ვარსკვლავურად ჩაწერილი დაფარვა და სრულებოდეს $\mathrm{R}_{\mathrm{B}_0}$ 2) პირობა $(P, ®_P)$-ს, $\mathcal{V}$-სა და $\mathcal{V}'$-თვის.

ვთქვათ, $P' = P \times_{\mathrm{B}_0} P$. $g_0, g_1 : (P', ®_{P'}) \to (P, ®_P)$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ ორი პროექცია. ვთქვათ, $f : (X, ®_X) \to (P', ®_{P'})$ არის $f_0\, p_{\sim} : (X, ®_X) \to (P, ®_P)$ და $f_1\, p_{\sim} : (X, ®_X) \to (P, ®_P)$ ფენების შემნახველი ასახვების დიაგონალური ნამრავლი. ცხადია, რომ $g_0\, f = f_0\, p_{\sim}$, $g_1\, f = f_1\, p_{\sim}$, $F_0 = g_0\, f$ და $F_1 = g_1\, f$.

ლემა 3.1.9-ის თანახმად არსებობს $(P'', ®_{P''})$ $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცე, ფენების შემნახველი $f' : (X, ®_X) \to (P'', ®_{P''})$, $g : (P'', ®_{P''}) \to (P', ®_{P'})$ ასახვები და ფენების შემნახველი $G : (P'' \times I, ®_{P'' \times I} \to (P, ®_P)$ ჰომოტოპია ისეთი, რომ

$$g\, f' = f,$$

$$G_0 = g_0\, g, G_1 = g_1\, g,$$

$$G(f' \times 1) = F.$$

შევარჩიოთ $(P'' \times I, ®_{P'' \times I})$-ის $G^{-1}(\mathcal{V}')$ ღია დაფარვაში ჩაწერილი ისეთი ღია, რომელიც არის $(P'' \times I, ®_{P'' \times I})$-ის $\mathscr{V}$ აგურისებრი დაფარვა, მოცემული $(P'', ®_{P''})$-ს ლოკალურად სასრული $\mathcal{W}$ ღია დაფარვით და I-ის სასრული $\mathcal{J}_W, W \in \mathscr{W}$ ღია დაფარვებით.

$\mathbf{R}_{\mathbf{B}_0}$ 1) პირობის თანახმად არსებობს $\sim'' \geq \sim$ და ფენების შემნახველი $h : (X_{\sim''}, ®_{X_{\sim''}}) \to (P'', ®_{P''})$ ასახვა ისეთი, რომ

$$(f', h\, p_{\sim''}) \leq \mathscr{W}.$$

ცხადია, რომ ყოველი $W \in \mathcal{W}$, $W \times 0 \subseteq W \times J$, სადაც $J \in \mathcal{J}_W$ და რაიმე $V' \in \mathcal{V}'$ ღია სიმრავლისთვის $W \times J \subset G^{-1}(V')$.

შევნიშნოთ, რომ

$$g_0 g(W) = G_0(W) = G(W \times 0) \subseteq G(W \times J) \subseteq V'.$$

ამრიგად, $g_0 g(\mathscr{W})$ ჩაწერილია $\mathscr{V}'$ და $(g_0\, g\, f', g_0\, g\, h\, p_{\sim''}) \leq \mathscr{V}'$.

შემდეგი ტოლობიდან

$$g_0\, g f' = g_0 f = f_0 p_{ª} = f_0 p_{\sim\sim'} p_{\sim''}$$

გამომდინარეობს

$$(g_0 g h p_{\sim''}, f_0\, p_{\sim\sim''}\, p_{\sim''}) \leq \mathcal{V}'.$$

აგრეთვე, შეიძლება ვთქვათ, რომ

$$(g_1 ghp_{\sim''}, f_1\, p_{\sim\sim''}\, p_{\sim''}) \le \mathcal{V}'.$$

$\mathbf{R}_{\mathbf{B_0}}$ **2)** პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $\sim' \ge \sim''$, რომ

$$(g_0 ghp_{\sim''\sim'}, f_0\, p_{\sim\sim'}) \le \mathcal{V}$$

და

$$(g_1 ghp_{\sim''\sim'}, f_1\, p_{\sim\sim'}) \le \mathcal{V}.$$

აქედან გამომდინარე, არსებობს ფენების შემნახველი $\mathcal{U}'$ -ჰომოტოპიები $K, L : (X_{\sim'} \times I, ®_{X_{\sim'}\times I}) \to (P, ®_P)$ ისეთი, რომ $K_0 = f_0 p_{\sim\sim'}, K_1 = g_0 ghp_{\sim''\sim'}$, $L_0 = f_1 p_{\sim\sim'}$ და $L_1 = g_1 ghp_{\sim''\sim'}$.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $t \in I$ რიცხვისთვის $(f'(x), t)$ და $(hp_{\sim''}(x), t)$ წყვილები ეკუთვნის $\mathscr{V}$ დაფარვის რაიმე ელემენტს და, აქედან გამომდინარე, $G^{-1}(V')$ -ს რომელიმე $V' \in \mathcal{V}'$ ელემენტისთვის. ამრიგად, $G(f' \times 1_I)$ და $G(hp_{\sim''} \times 1_I)$ არიან $\mathcal{V}'$ -მახლობადი ასახვები. აქედან გამომდინარე,

$$(G(f' \times 1_I), G(hp_{\sim''} \times 1_I)) \le \mathcal{V}.$$

ახლა განვმარტოთ ფენების შემნახველი $H : (X_{\sim'} \times I, ®_{X_{\sim'}\times I}) \to (P, ®_P)$ ჰომოტოპია შემდეგი ფორმულებით

$$H(y,t) = \begin{cases} K(y, \dfrac{t}{¨(z)}), & 0 \le t \le ¨(z), \\ G(z, \dfrac{t - ¨(z)}{1 - 2¨(z)}), & ¨ \le t \le 1 - ¨(z), \\ L(y, \dfrac{1-t}{¨(z)}), & 1 - ¨(z) \le t \le 1, \end{cases}$$

სადაც $z = hp_{\sim''\sim'}(y)$ და $¨ : (P'', ®_{P''}) \to I$ არის $[\mathrm{M}_4]$-ში განმარტებული ასახვები.

$[\mathrm{M}_4]$-ში მოყვანილი მტკიცების მსგავსად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ყოველი $(x,t) \in X \times I$ წყვილისთვის არსებობს ისეთი $U \in \mathcal{U}$ ღია სიმრავლე, რომ

$$F(x,t), H(p_{\sim}(x), t) \in U. \ \square$$

თეორემა 3.1.6-ის დამტკიცება. თავდაპირველად დავამტკიცოთ შემდეგი პირობა.

E$_{\mathrm{B}_0}$**1)**. ვთქვათ, $\mathcal{U}$ არის $(P,®_P)$-ის ღია დაფარვა. განვიხილოთ $\mathcal{V}$ ღია დაფარვა როგორც წინადადება 3.1.1-შია. **R**$_{\mathrm{B}_0}$**1)** პირობის თანახმად არსებობს $\sim\in\mathscr{A}$ ინდექსი და ფენების შემნახველი $h:(X_\sim,®_{X_\sim})\to(P,®_P)$ ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს $(hp_\sim, f)\le\mathcal{V}$ პირობას. ამრიგად, $\mathcal{V}$-ს შერჩევის თანახმად, $f \underset{\mathrm{B}_0}{\simeq} h\,p_\sim$.

S$_{\mathrm{B}_0}$**2)**. ვთქვათ, $\mathcal{U}$ ღია დაფარვაა. განვიხილოთ $\mathcal{V}$ ღია დაფარვა როგორც წინადადება 3.1.1-შია. ლემა 3.1.9-ის თანახმად არსებობს $\sim'\ge\sim$ ინდექსი და ფენების შემნახველი $H:(X_{\sim'}\times I,®_{X_{\sim'}\times I})\to(P,®_P)$ ჰომოტოპია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$H(z,0)=f_0p_{\sim\sim'}(z),\quad z\in X_{\mathrm{a}'},$$

$$H(z,1)=f_1p_{\sim\sim'}(z),\quad z\in X_{\mathrm{a}'},$$

$$(S,H(1\times p_{\sim'}))\le\mathcal{V}.$$

ახლა განვიხილოთ $Z=X\times I$ და $A=X\times\partial I$ B_0-ზე სივრცეები და $h_0=F$ და $h_1=H(p_{\sim'}\times1)$ ფენების შემნახველი ასახვები.

შევნიშნოთ, რომ $h_{0|A}=h_{1|A}$. მართლაც, ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის

$$h_0(x,0)=F(x,0)=f_0p_\sim(x)=f_0p_{\sim\sim'}p_{\sim'}(x)=H(p_{\sim'}(x),0)=h_1(x,0).$$

ანალოგიურად, ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის გვაქვს

$$h_0(x,1)=F(x,1)=f_1p_\sim(x)=f_1p_{\sim\sim'}p_{\sim'}(x)=H(p_{\sim'}(x),1)=h_1(x,0).$$

აქედან გამომდინარე, $(h_0,h_1)\le\mathcal{V}$. წინადადება 3.1.1-ის თანახმად არსებობს ფენების შემნახველი ჰომოტოპია $\mathrm{rel}(X\times\partial I)$, რომელიც აკავშირებს F და $H(p_{\sim'}\times1_I)$ ასახვებს. □

3.2 ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორიის შესახებ

ვთქვათ, Δ^n არის სტანდარტული n-სიმპლექსი, ე.ი. სიმრავლე ყველა შესაძლო $t=\{t=(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in R^{n+1}\}$ წერტილებისა, სადაც $t_0\ge0,\cdots,t_n\ge0$ და $t_0+\cdots+t_n=1$.

ყოველი $n > 0$ და $0 \le j \le n$ მთელი რიცხვებისთვის არსებობს j-ური საზღვრის ოპერატორი $\partial_j^n : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ და ყოველი $n > 0$ და $0 \le j \le n$ მთელი რიცხვებისთვის არსებობს j-ური გადაგვარებული ოპერატორი $\pm_j^n : \Delta^{n+1} \to \Delta^n$ მოცემული შემდეგი ფორმულებით

$$\partial_j^n(t_0, \cdots, t_{n-1}) = (t_0, \cdots, t_{j-1}, 0, t_j, \cdots, t_{n-1}),$$

$$\pm_j^n(t_0, \cdots, t_{n+1}) = (t_0, \cdots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \cdots, t_{n+1}).$$

ვთქვათ, $\mathscr{B}$ არის მიმართული სიმრავლე. $\mathscr{B}^n$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $\mathscr{B}$ სიმრავლის ელემენტებისაგან შემდგარი ყველა შესაძლო $= (_0, \cdots, _n)$, $_0 \le \cdots \le _n$ მიმდევრობების სიმრავლე.

$n > 0$ და $0 \le j \le n$ მთელი რიცხვებისთვის განვიხილოთ j-ური საზღვრის ოპერატორი $d_j^n : \mathscr{B}^n \to \mathscr{B}^{n-1}$ მოცემული შემდეგი ფორმულით

$$d_j^n(_0, \cdots, _n) = (_0, \cdots, _{j-1}, _{j+1}, \cdots, _n)$$

და ყოველი $n \ge 0$ და $0 \le j \le n$ მთელი რიცხვებისთვის s_j^n სიმბოლოთი ავღნიშნოთ j-ური გადაგვარებული ოპერატორი $s_j^n : \mathscr{B}^n \to \mathscr{B}^{n+1}$ მოცემული შემდეგი ფორმულით

$$s_j^n(_0, \cdots, _n) = (_0, \cdots, _j, _j, \cdots, _n).$$

სიმარტივისთვის $d_j^n(\ )$ და $s_j^n(\ )$ ანასახები აღვნიშნოთ შესაბამისად $_j$ და ^{j} სიმბოლოებით.

ვთქვათ, $\mathbf{X} = ((X_{\sim}, ®_{X_{\sim}}), p_{\sim\sim'}, \mathscr{A})$ და $\mathbf{Y} = ((Y \ , ®_Y \ ), p \ _{'}, \mathscr{B})$ არის $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიის ობიექტები.

B_0-ზე კოჰერენტული ასახვა $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ შედგება ისეთი ¨ ფუნქციისა და ფენების შემნახველი f ასახვისაგან, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

i). ¨ ფუნქცია, რომელიც ყოველ $n \ge 0$ მთელ რიცხვს და $= (_0, \cdots, _n) \in \mathscr{B}^n$ ელემენტს შეუსაბამებს $¨(\ ) = ¨(_0, \cdots, _n) \in \mathscr{A}$ ელემენტს შემდეგი პირობით:

$$¨(\ ) \ge ¨(_j), \quad 0 \le j \le n, \ n > 0.$$

ii). ყოველი $n \geq 0$ მთელი რიცხვისთვის და ყოველი $\quad = (\ _0, \cdots, \ _n) \in \mathscr{B}^n$ ელემეტისთვის ფენების შემნახველი $f \ : (X_{\cdot\cdot(\ )} \times \Delta^n, ®_{X_{\cdot\cdot(\ )} \times \Delta^n}) \to (Y_{\ 0}, ®_{Y_{\ 0}})$ ასახვები აკმაყოფილებს პირობებს:

$$f \ (x, \partial_j^n t) = \begin{cases} q_{\ 0 \ 1} f_{\ 0} (p_{\cdot\cdot(\ 0)} p_{\cdot\cdot(\ )}(x), t), & j = 0 \\ f_{\ j} (p_{\cdot\cdot(\ j)} p_{\cdot\cdot(\ )}(x), t), & 0 \leq j \leq n, \end{cases}$$

სადაც $x \in X_{\cdot\cdot(\ )}$, $t \in \Delta^{n-1}$, $n \geq 0$, $X_{\cdot\cdot(\ )} \times \Delta^n$ არის B_0-ზე სივრცე $®_{X_{\cdot\cdot(\ )} \times \Delta^n} : X_{\cdot\cdot(\ )} \times \Delta^n \to \mathrm{B}_0$ პროექციით, რომელიც მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$®_{X_{\cdot\cdot(\ )} \times \Delta^n}(x,t) = ®_{X_{\cdot\cdot(\ )}}(x), \quad x \in X_{\cdot\cdot(\ )}, t \in \Delta^n$$

და

$$f \ (p_{\cdot\cdot(\ )\ddot{}(\ j)}(x), \pm_j^n(t)) = f_{\ j}(x,t), 0 \leq j \leq n, x \in X_{\cdot\cdot(\ j)}, t \in \Delta^{n+1}, n \geq 0.$$

B_0-ზე იგივური კოჰერენტული ასახვა $1_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ მოიცემა ფორმულებით:

$$\ddot{} (\sim) = \sim_n, \ \sim = (\sim_0, \cdots, \sim_n) \in \mathscr{A}^n,$$

$$1_{\sim}(x,t) = p_{\sim_0 \sim_n}(x), \quad x \in X_{\sim_n}, t \in \Delta^n, n \geq 0.$$

ფენების შემნახველი ჰომოტოპია $F : \mathbf{X} \times I \to \mathbf{Y}$, რომელიც აკავშირებს ფენების შემნახველ $f, f' : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ კოჰერენტულ ასახვებს, არის ფენების შემნახველი კოჰენეტული ასახვა $\mathbf{X} \times I = ((X_{\sim} \times I, ®_{X_{\sim} \times I}), p_{\sim\sim'} \times 1_I, \mathscr{A})$-დან $\mathbf{Y}$-ში, მოცემული Φ ფუნქციისა და ფენების შემნახველი $F_{\ j} : (X_{\cdot\cdot(\ j)} \times I \times \Delta_n, ®_{X_{\cdot\cdot(\ j)} \times I \times \Delta_n}) \to (Y_{\ 0}, ®_{Y_{\ 0}})$ ასახვებისაგან, რომლებსაც აქვთ i) და ii) თვისებები და აგრეთვე აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$\Phi(\ ) \geq \ddot{}(\ ), \ddot{}'(\ ),$$

$$F \ (x,0,t) = f \ (p_{\cdot\cdot(\ )\Phi(\ )}(x), t),$$

$$F \ (x,1,t) = f' (p_{\cdot\cdot'(\ )\Phi(\ )}(x), t),$$

სადაც $x \in X_{\cdot\cdot(\ )}, t \in \Delta^n, n \geq 0$.

[L-M] -ის მსგავსად შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

წინადადება 3.2.1. *ფენების შემნახველ კოჰერენტულ ასახვებს შორის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიის მიმართება არის ექვივალენტური მიმართება.* □

$f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ასახვას ეწოდება ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ასახვა ან B_0-ზე სპეციალური კოჰერენტული ასახვა, თუ ყოველი $\in \mathscr{B}^n$ ელემენტისთვის $\text{¨}(\ \ ) = \text{¨}(\ _n)$ და $\text{¨}_{|\mathscr{B}} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ არის ზრდადი ფუნქცია.

$f, f' : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ასახვების დამაკავშირებელი ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ჰომოტოპია არის f და f' ასახვებს შორის ფენების შემნახველი ისეთი კოჰერენტული ჰომოტოპია $F : \mathbf{X} \times I \to \mathbf{Y}$, რომ იგი ასევე არის ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ასახვა.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\mathbf{Y}$-ის ინდექსთა $\mathscr{B}$ სიმრავლე არის კოსასრული სიმრავლე, მაშინ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიის მიმართება არის ფენების შემნახველ კოჰერენტულ ასახვებს შორის ექვივალენტობის მიმართება.

შემდეგი წინადადების მტკიცება მიმდინარეობს ისევე როგორც [L-M]-შია.

წინადადება 3.2.2. *ვთქვათ,* $f, f' : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $g, g' : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z} = ((Z_{\text{¥}}, \text{®}_{Z_{\text{¥}}}), r_{\text{¥¥}'}, \mathscr{C})$ *არის ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ასახვები და* F, G *შესაბამისად არის ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ჰომოტოპიები, რომლებიც აკავშირებ* f *ასახვას* f'*-თან და* g *ასახვას* g'*-თან. თუ ინდექსთა* $\mathscr{C}$ *სიმრავლე კოსასრულია, მაშინ არსებობს ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ჰომოტოპია* $g f$ *და* $g' f'$ *ასახვებს შორის.* □

წინადადება 3.2.3. *თუ* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $g : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ *და* $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{W}$ *არის ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ასახვები ინდექსთა კოსასრულ სიმრავლეზე მოცემულ* $\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}$*-ის შებრუნებულ სისტემებს შორის, მაშინ არსებობს ფენების შემნახველი სპეციალური ჰომოტოპია* $h(gf)$ *და* $(hg)f$ *ასახვებს შორის.* □

წინადადება 3.2.4. *თუ* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *არის ფენების შემნახველი სპეციალური ასახვა ინდექსთა კოსასრულ სიმრავლეზე მოცემულ* $\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}$*-ის შებრუნებულ სისტემებს შორის და* $1_{\mathbf{X}}$ *და* $1_{\mathbf{Y}}$ *არის ფენების შემნახველი სპეციალური იგივური ასახვები, მაშინ არსებობს ფენების*

შემნახველი სპეციალურიჰომოტოპიები, რომლებიც აკავშირებს $f1_{\mathbf{X}}$ -ს f -თან და $1_{\mathbf{Y}} f$ -ს f -თან.□

მსგავსად [L-M]-სა შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ როცა $\mathbf{Y}$ -ის ინდექსთა $\mathscr{B}$ სიმრავლე კოსასრულია, მაშინ $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვების ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიის ყოველი $[f]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ კლასი მოიცავს ფენების შემნახველი სპეციალური ასახვების ფენების შემნახველი ჰომოტოპიის ერთადერთ კლასს.

ფენების შემნახველი კოჰერენტული პროჰომოტოპიის $\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის ობიექტებია ინდექსთა მიმართულ კოსასრულ სიმრავლეზე მოცემული B_0-ზე ტოპოლოგიური სივრცეებისა და ფენების შემნახველი ასახვებისაგან შემდგარი $\mathbf{X}=((X_{\sim},®_{X_{\sim}}),p_{\sim\sim'},\mathscr{A})$ შებრუნებული სისტემები. ამ კატეგორიის მორფიზმები კი არის $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიის $[f]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ კლასები. მორფიზმების ანუ კლასების კომპოზიცია განმარტებულია, როგორც მათი წარმომადგენლების კომპოზიცია, რომლებიც არიან ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ასახვები. $\mathbf{X}$ ობიექტის იგივური მორფიზმი არის კლასი, რომელიც მოიცავს $1_{\mathbf{X}}:\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ კოჰერენტულ ასახვას.

ახლა განვმარტოთ

$$\mathrm{C}:\mathbf{pro-Top}_{\mathbf{B}_0}\to\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$$

ფუნქტორი. ვთქვათ, $(f\ ,\ddot{\ })\colon\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ არის შებრუნებულ სისტემებს შორის ასახვა. $(f\ ,\ddot{\ })$ ასახვას შევუსაბამოთ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვა $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$. ამისთვის $\ddot{\ }:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ ფუნქცია გავაგრძელოთ ყოველი $\ \ =(\ _0,\cdots,\ _n)$ ელემენტისთვის ისე, რომ

$$\ddot{\ }(\ \ )\geq\ddot{\ }(\ _j),0\leq j\leq n.$$

გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი. ვთქვათ, $n=1$ და $\ \ =(\ _0,\ \ _1)$. შევნიშნოთ, რომ

$$f_{\ _0}\,p_{\ddot{\ }(\ _0)\ddot{\ }(\ _0,\ _1)}=q_{\ _0\ _1}f_{\ _1}\,p_{\ddot{\ }(\ _1)\ddot{\ }(\ _0,\ _1)}.$$

ვთქვათ, $f \ :(X_{\cdot\cdot(\ )} \times \Delta^n, ®_{X_{\cdot\cdot(\ )}\times\Delta^n}) \to (Y_{\ 0}, ®_{Y_{\ 0}})$ არის ფენების შემნახველი ასახვა განსმარტებული შემდეგნაირად

$$f \ (x,t) = f_{\ 0}\, p_{\cdot\cdot(\ \ 0)\cdot\cdot(\ \ )}(x), \quad x \in X_{\cdot\cdot(\ \ )}, t \in \Delta^n.$$

ასევე შევნიშნოთ, რომ

$$f \ (x, \partial_0^n t) = f_{\ 0}\, p_{\cdot\cdot(\ \ 0)\cdot\cdot(\ \ )}(x) = q_{\ \ 0\ 1}\, f_{\ 1}\, p_{\cdot\cdot(\ \ 1)\cdot\cdot(\ \ )}(x) = q_{\ \ 0\ 1}\, f_{\ 0}(p_{\cdot\cdot(\ \ 0)\cdot\cdot(\ \ )}(x), t)$$

და

$$f \ (x, \partial_j^n t) = f_{\ 0}\, p_{\cdot\cdot(\ \ 0)\cdot\cdot(\ \ )}(x) = f_{\ j}(p_{\cdot\cdot(\ \ j)\cdot\cdot(\ \ )}(x), t), \ \ 0 < j \le n,$$

$$f \ (p_{\cdot\cdot(\ \ )\cdot\cdot(\ \ j)}(x), \pm_j^n t) = f_{\ 0}\, p_{\cdot\cdot(\ \ 0)\cdot\cdot(\ \ j)}(x) = f_{\ j}(x,t), \ \ 0 < j \le n.$$

ვთქვათ, $\ddot{}\,'$ არის $\ddot{}$ -ის სხვა გაგრძელება. ჩავთვალოთ, რომ შესაბამისი ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვაა f'. შევნიშნოთ, რომ f და f' არიან ფენების შემნახველი კოჰერენტულად ჰომოტოპიურები.

დავუშვათ, რომ

$$(f \ , \ddot{}\ ), (f', \ddot{}\,') : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

არიან ექვივალენტური მორფიზმები. მაშინ მათი შესაბამისი ფენების შემნახველი კოჰერენტული f და f' ასახვები დაკავშირებულია ფენების შემნახველი კოჰერენტული $F : \mathbf{X} \times I \to \mathbf{Y}$ ჰომოტოპიით.

ამრიგად, $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიის ყოველ $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ მორფიზმს შეიძლება შევუსაბამოთ $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ კატეგორიის $[f] = \mathrm{C}(\mathbf{f})$ მორფიზმი. თუ $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიას შევზღუდავთ ინდექსთა კოსასრულ სიმრავლეებზე მოცემული შებრუნებულ სისტემებამდე, მაშინ მივიღებთ, რომ $\mathrm{C}{:}\mathbf{pro-Top_{B_0}} \to \mathbf{CPHTop_{B_0}}$ არის ფუნქტორი.

განმარტების თანახმად,

$$\mathrm{C}(\mathbf{f}) = [f], \quad \mathbf{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{pro-Top_{B_0}}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

$$\mathrm{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \quad X \in ob(\mathbf{pro-Top_{B_0}}).$$

$\mathrm{C}(1_{\mathbf{Y}})$ არის $1_{\mathbf{Y}}$-ის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიის კლასი. ვთქვათ, $\mathbf{f}:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ და $\mathbf{g}:\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}$ არის $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმები. მსგავსად [L-M]-ისა შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ

$$\mathrm{C}(\mathbf{g}\mathbf{f})=\mathrm{C}(\mathbf{g})\,\mathrm{C}(\mathbf{f}).$$

ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ფუნქტორი

$$\mathrm{E}:\mathbf{CPHTop_{B_0}}\to\mathbf{pro-HTop_{B_0}}.$$

დავუშვათ, რომ $\mathbf{Top_{B_0}}$ კატეგორიის ყოველი $\mathbf{X}=(X_{\sim},p_{\sim\sim'},\mathscr{A})$ შებრუნებული სისტემისთვის, $\mathrm{E}\,\mathbf{X}=(X_{\sim},[p_{\sim\sim'}]_{\mathrm{B}_0},\mathscr{A})$.

ვთქვათ, $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ არის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვა მოცემული f ასახვით და $\ddot{}$ ფუნქციით. f ასახვას შევუსაბამოთ $\mathbf{pro-HTop_{B_0}}$ კატეგორიის $\mathbf{f}:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ მორფიზმი, მოცემული $\ddot{}|_{\mathscr{B}}:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ ფუნქციით და B_0-ზე ფიბრული ჰომოტოპიის $[f_{\ 0}]_{\mathrm{B}_0}:X_{\ddot{}(\ 0)}\to Y_{\ 0}$ კლასით.

შევნიშნოთ, რომ $\mathbf{f}$ არის $\mathbf{pro-HTop_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმი. მართლაც, ყოველი $_0\le\ _1$ და $\sim=\ddot{}(\ _0,\ _1)$ ელემენტებისთვის გვაქვს $\sim\ \ge\ddot{}(\ _0),\ddot{}(\ _1)$. აქედან გამომდინარე, $f_{\ 0\ 1}:(X_{\sim}\times\Delta^1,®_{X_{\sim}\times\Delta^1})\to(Y_{\ 0},®_{Y_{\ 0}})$ ფენების შემნახველი ასახვა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$f_{\ 0\ 1}(x,\partial_0^1(1))=q_{\ 0\ 1}f_{\ 1}(p_{\ddot{}(\ 1)\sim}(x),1)$$

და

$$f_{\ 0\ 1}(x,\partial_1^1(1))=f_{\ 0}(p_{\ddot{}(\ 0)\sim}(x),1).$$

ამრიგად,

$$[f_{\ 0}]_{\mathrm{B}_0}\,[p_{\ddot{}(\ 0)\sim}]_{\mathrm{B}_0}=[q_{\ 0\ 1}]_{\mathrm{B}_0}\,[f_{\ 1}]_{\mathrm{B}_0}\,[p_{\ddot{}(\ 1)\sim}]_{\mathrm{B}_0}.$$

ვთქვათ, $f,f':\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ არის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიური ასახვები და $F:\mathbf{X}\times I\to\mathbf{Y}$ არის f და f' ასახვებს შორის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპია, მოცემული Φ ფუნქციით და F ფენების შემნახველი

ასახვით. შევნიშნოთ, რომ $\Phi(\ _0) \geq \ddot{}(\ _0), \ddot{}'(\ _0)$ და $F_{\ 0} : X_{\Phi(\ _0)\times I\times\Delta^0} \to Y_{\ 0}$ არის ფენების შემნახველი ისეთი ასახვა, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

$$F_{\ 0}(x,0,1) = f_{\ 0}(p_{\ddot{}(\ _0)\Phi(\ _0)}(x),1)$$

და

$$F_{\ 0}(x,0,1) = f'_{\ 0}(p_{\ddot{}'(\ _0)\Phi(\ _0)}(x),1).$$

აქედან გამომდინარე,

$$[f_{\ 0}]_{B_0}\ [p_{\ddot{}(\ _0)\Phi(\ _0)}]_{B_0} = [f'_{\ 0}]_{B_0}\ [p_{\ddot{}'(\ _0)\Phi(\ _0)}]_{B_0}.$$

ამრიგად, f და f' ასახვების შესაბამისი მორფიზმები $\mathbf{pro-HTop_{B_0}}$ კატეგორიის ერთი და იგივე მორფიზმებია. აქედან გამომდინარე, შეიძლება განვმარტოთ შემდეგი ფუნქტორი

$$\mathrm{E} : \mathbf{CPHTop_{B_0}} \to \mathbf{pro-HTop_{B_0}}.$$

$\mathrm{E} \circ \mathrm{C} : \mathbf{pro-Top_{B_0}} \to \mathbf{pro-HTop_{B_0}}$ კომპოზიცია არის ფენების შემნახველი $H : \mathbf{Top_{B_0}} \to \mathbf{HTop_{B_0}}$ ჰომოტოპიური ფუნქტორით ინდუცირებული ფუნქტორი.

$f : X \to \mathbf{Y}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვა შედგება ისეთი $f\ : (X \times \Delta^n, ® _{X\times\Delta^n}) \to (Y_{\ 0}, ®_{Y_{\ 0}})$ ასახვებისაგან, სადაც $\ = (\ _0, \cdots, \ _n) \in \mathscr{B}$, $n \geq 0$, რომ სრულდება შემდეგი პირობები: ყოველი $x \in X$, $t \in \Delta^{n-1}, n > 0$

$$f\ (x, \partial_j^n t) = \begin{cases} q_{\ 0\ 1} f_{\ 0}(x,t), & j = 0, \\ f_{\ j}(x,t), & 0 < j \leq n \end{cases}$$

და ნებისმიერი $x \in X$, $t \in \Delta^{n+1}, n \geq 0$

$$f\ (x, \pm_j^n t) = f_{\ j}(x,t),\ \ 0 \leq j \leq n.$$

ცხადია, $f : X \to \mathbf{Y}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვა არის ფენების შემნახველი სპეციალური კოჰერენტული ასახვა.

f და f' დამაკავშირებელი ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპია $F : X \times I \to \mathbf{Y}$ არის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვა მოცემული ისეთი F ასახვით, რომ სრულდება პირობები: ყოველი $x \in X, t \in \Delta^n$

$$F\ (x,0,t) = f\ (x,t)$$

და

$$F\ (x,1,t) = f'(x,t).$$

ვთქვათ, $\mathbf{p} = (p_{\sim}) : X \to \mathbf{X}$ არის $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმი. ცხადია, რომ $\mathbf{p}$ მორფიზმით ასოცირებულია ერთადერთი $p : X \to \mathbf{X}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვა, მოცემული შემდეგი ფორმულით.

$$p_{\sim}(x,t) = p_{\sim_0}(x),$$

სადაც $\sim = (\sim_0, \cdots, \sim_n) \in \mathscr{A}^n, x \in X, t \in \Delta^n$.

$\mathbf{SSH_{B_0}}$ კატეგორიის ობიექტებია ყველა შესაძლო B_0-ზე ტოპოლოგიური სივრცეები, ხოლო $\mathbf{SSH_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმები განიმარტება შემდეგნაირად.

ვთქვათ, $\mathbf{p} : (X, ®_X) \to \mathbf{X}$ და $\mathbf{q} : (Y, ®_Y) \to \mathbf{Y}$ შესაბამისად არის $(X, ®_X)$ და $(Y, ®_Y)$ სივრცეების $\mathrm{ANR_{B_0}}$-რეზოლვენტები და $[f] : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ კლასი კი არის $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ კატეგორიის რაიმე მორფიზმი. ასევე, ვთქვათ, $\mathbf{p}' : (X, ®_X) \to \mathbf{X}'$, $\mathbf{q}' : (Y, ®_Y) \to \mathbf{Y}'$, $[f'] : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ არის B_0-ზე $(X, ®_X)$ და $(Y, ®_Y)$ სივრცეთა ფიბრული რეზოლვენტების და $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმისაგან შედგენილი სხვა სამეული.

ახლა განვმარტოთ შემდეგი ექვივალენტობის მიმართება. ვიტყვით, რომ $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, [f])$ და $(\mathbf{p}', \mathbf{q}', [f'])$ სამეულები ექვივალენტურია თუ

$$[f']\,[i] = [j]\,[f],$$

სადაც $[i] : (X, ®_X) \to \mathbf{X}'$ და $[j] : (Y, ®_Y) \to \mathbf{Y}'$ არის $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ კატეგორიის იზომორფიზმები.

ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმი $\mathrm{F} : (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ არის $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, [f])$ სამეულის ექვივალენტობის კლასი ზემოთ მოცემული $\sim$ მიმართების მიმართ.

ვთქვათ, $F : (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$ და $G : (Y, ®_Y) \to (Z, ®_Z)$ შესაბამისად არის $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, [f])$ და $(\mathbf{p}', \mathbf{q}', [f'])$ სამეულებით განმარტებული ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმები.

როგორც ვიცით არსებობს $\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის ერთადერთი $[h]:\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}'$ მორფიზმი ისეთი, რომ $[h]\,[q]=[q']$. შევნიშნოთ, რომ

$$[j][q]=[q']=[h]\,[q].$$

აქედან გამომდინარე, $[j]=[h]$. გარდა ამისა,

$$[g]\,[j]=[g]\,[h]\,[1_{\mathbf{Z}}].$$

ამრიგად, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ F და G მორფიზმები შესაბამისად არის მოცემული $(\mathbf{p},\mathbf{q},[f])$ და $(\mathbf{q},\mathbf{r},[g])$ სამეულებით.

ასევე, შეგვიძლია განვმარტოთ $GF:X\to Z$ კომპოზიცია, როგორც $(\mathbf{p},\mathbf{r},[g]\,[f])$ სამეულით მოცემული.

იგივური მორფიზმის როლში $\mathscr{P}:X\to X$ მორფიზმისთვის შეიძლება შევამოწმოთ, რომ შეიძლება $(\mathbf{p},\mathbf{q},[1_X])$ სამეულით განსაზღვრული მორფიზმი.

აგებულ $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიას ვუწოდოთ ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია.

ვთქვათ, $X\in ob(\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0})$. $\mathrm{ssh}_{\mathrm{B}_0}(X)$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ $(X,®_X)$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ექვივალენტობის კლასები და ვუწოდოთ $(X,®_X)$ სივრცის ფიბრული ძლიერი შეიპი.

ყოველი $¨:(X,®_X)\to(Y,®_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვისთვის შევარჩიოთ

$$\mathbf{p}:(X,®_X)\to\mathbf{X}$$

და

$$\mathbf{q}:(Y,®_Y)\to\mathbf{Y}$$

$\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტები. ცხადია, არსებობს $\mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის ერთადერთი მორფიზმი $[f]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ ისეთი, რომ

$$[q]\,[¨]=[f]\,[p].$$

შეგვიძლია განვმარტოთ ფუნქტორი $\mathrm{SS}'_{\mathrm{B}_0}:\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}\to\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$. განმარტების თანახმად,

$$\mathrm{SS}'(X)=X,\quad X\in ob(\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0})$$

და

$$\mathrm{SS}'(¨)=\Phi,\quad ¨\in\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}}(X,Y).$$

აქ Φ არის $(\mathbf{p},\mathbf{q},[f])$ სამეულის ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმი.

მსგავსად [L-M]-ისა შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ $\mathrm{SS}'_{\mathrm{B}_0}$ ფუნქტორი ინდუცირებს

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0} : \mathbf{HTop}_{\mathbf{B_0}} \to \mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}$$

ფუნქტორს. განმარტების თანახმად,

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}(X) = X,\, X \in ob(\mathbf{HTop}_{\mathbf{B_0}})$$

და

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}([\ddot{\ }]_{\mathrm{B}_0}) = \mathrm{S}'(\ddot{\ }), [\ddot{\ }]_{\mathrm{B}_0} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{HTop}_{\mathbf{B_0}}}(X,Y).$$

განვმარტოთ

$$\mathrm{S} : \mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}} \to \mathbf{SH}_{\mathbf{B_0}}$$

ფუნქტორი. დავუშვათ, რომ ყოველი $X \in ob(\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}})$ ობიექტისთვის $\mathrm{S}(X) = X$. ვთქვათ,

$$F : (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$$

არის $(\mathbf{p},\mathbf{q},[f])$ სამეულით მოცემული ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმი.

განვიხილოთ $\mathrm{E}([f])$ მორფიზმი, როგორც $[f]$ კლასის ანასახი

$$\mathrm{E} : \mathbf{CPHTop}_{\mathbf{B_0}} \to \mathbf{pro-HTop}_{\mathbf{B_0}}$$

ფუნქტორის მიმართ. $(\mathrm{H}\mathbf{p}, \mathrm{H}\mathbf{q}, \mathrm{E}[f])$ სამეული წარმოქმნის მორფიზმს, რომელიც ავღნიშნოთ

$$\mathrm{S}(F) : (X, ®_X) \to (Y, ®_Y)$$

სიმბოლოთი.

ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი

თეორემა 3.2.5. *არსებობს შემდეგი კომუტაციური დიაგრამა*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{SH}_{\mathbf{B_0}} \\
\mathbf{HTop}_{\mathbf{B_0}} \arrow[ur, "\mathrm{S}_{\mathrm{B}_0}"] \arrow[dr, "\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}"'] & \\
 & \mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}, \arrow[uu, "\mathrm{S}"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $\mathrm{S}_{\mathrm{B}_0}$ *არის ფიბრული შეიპური ფუნქტორი, რომელიც განმარტებული* $[\mathrm{B}_4]$ *-ში.* □

შედეგი 3.2.6. *ვთქვათ,* $(X,®_X)$ *და* $(Y,®_Y)$ *არის* B_0*-ზე ტოპოლოგიური სივრცეები. თუ* $\mathrm{ssh}_{\mathrm{B}_0}((X,®_X)) = \mathrm{ssh}_{\mathrm{B}_0}((Y,®_Y))$*, მაშინ* $\mathrm{sh}_{\mathrm{B}_0}((X,®_X)) = \mathrm{sh}_{\mathrm{B}_0}((Y,®_Y))$. □

შენიშვნა 3.2.7. *დისერტაციაში და* ([B_{10}],[L-M],[M_4],[M_5]) *შრომებში განვითარებული მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელია ნებისმიერი უწყვეტი ასახვების კატეგორიისთვის ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის აგება.*

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომის კვლევების ძირითადი მიღწევებია:

1. ბორსუკის ფიბრული წყვილების შესწავლა და მათი თვისებების დადგენა.
2. ფიბრული ძლიერი შეიპური დეფორმაციული რეტრაქტების, ე.წ. $\mathrm{SSDR}_{\mathbf{B_0}}$-ასახვების, განმარტება და მათი თვისებების დადგენა.
3. B_0-ზე ფიბრანტული სივრცეების განმარტება და მათი თვისებების დადგენა.
4. B_0-ზე სივრცეთა შებრუნებული მიმდევრობის ფიბრული კოტელესკოპის აგება და მისი თვისებების შესწავლა.
5. ფიბრული კოტელესკოპის, B_0-ზე ფიბრანტული სივრცეების და ფიბრული რეზოლვენტების გამოყენებით კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კლასიფიკაციის აგება.
6. ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის მეშვეობით ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობების დახასიათება.
7. ფიბრული ძლიერი $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-გაფართოების ცნების შემოტანა და მისი არსებობის თეორემის დამტკიცება.
8. ზოგად ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}$ ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორიის, $\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}:\mathbf{HTop}_{\mathbf{B_0}}\to\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}$ ძლიერი შეიპური ფუნქტორის, ვ.ბალაძის $\mathbf{SH}_{\mathbf{B_0}}$ ფიბრულ შეიპურ კატეგორიაში $\mathrm{S}:\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}\to\mathbf{SH}_{\mathbf{B_0}}$ ფუნქტორის აგებანი და $\mathrm{S}\cdot\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}=\mathrm{S}_{\mathrm{B}_0}$ ტოლობის დამტკიცება, სადაც $\mathrm{S}_{\mathrm{B}_0}:\mathbf{HTop}_{\mathbf{B_0}}\to\mathbf{SH}_{\mathbf{B_0}}$ არის ვ.ბალაძის ფიბრული შეიპური ფუნქტორი.

ლიტერატურა

[A] V.V. Agaronian, Shape classication of uniform spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 228 (1976), 848-851.

[A-S] V.V. Agaronian and Yu. M. Smirnov, The shape theory for uniform spaces and the shape uniform invariants.Commentationes Math. Univ. Corolinae, 19 (1978), 351-357.

[Ak_1] Y. Akaike, Proper n-shape and property SUV", Bull. Polish Acad. Sci., Math., 45 (1997),251-261.

[Ak_2] Y. Akaike, Proper n-shape and the Freudellthal compactifiratioll, Tsukuba J. Math., 22 (1998), 393-406.

[Ak-Sa] Y.Akaike and K.Sakai, Describing the proper n-shape category by using non-continuous functions, Glasnik. Math., (53) (1998), 299-321.

[An_1] S.A.Antonyan, Equivariant generalization of Dugundji's theorem,Mat. Zametki 38 (1985) 608-616; English transl. in: Math. Notes 38 (1985),844-848.

[An_2] S.A. Antonian, An equivariant theory of retracts, in: Aspects of Topology (In memory of Hugh Dowker), London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 93, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (1985),251-269.

[An_3] S.A. Antonian, Equivariant embeddings into G-AR's, Glas. Mat. 22 (42) (1987),503-533.

[An_4]S.A. Antonyan, Retraction properties of the orbit space, Mat. Sb. 137 (1988) 300-318; English transl. in: Math. USSR-Sb. 65 (1990),305-321.

[An-M] S. A. Antonian and S. Mardešic´, Equivariant shape. Fund. Math., 127 (1987), 213–224.

[An-J-N] S. A. Antonyan, R. Jimenez and S. de Neymet, Fiberwise retraction and shape properties of the orbit space, Glasnik Mat., 35(2000), 191-210.

[B_1] V. Baladze, On an equivariant strong theory of shapes. (Russian. English summary). Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR., 122(1986), 501-504.

[B_2] V.Baladze, On shape theory for fibrations, Bull. Georgian Acad. Sci., 129(1988), 269-272.

[B_3] V.Baladze, On shape of map, Inter. Top. Conf., Proceedings, Baku, 1989, 35-43.

[B_4] V.Baladze, Fiber shape theory, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste.An International Journal of Mathematics, 22(1990), 67-77.

[B_5] V.Baladze, Fiber shape theory and resolutions, Zb. Rad. Filoz. Fak. Nisu, Ser. Mat., 5(1991),97-107.

[B_6] V. Baladze, Fiber shape theory of maps and resolutions. Bull. Georgian Acad. Sci., 141(1991),489–492.

[B_7] V.Baladze, A proper shape theory and resolutions. Bull. Georgian Acad. Sci., 151(1995), 13-18 .

[B_8] V. Baladze, On Uniform shapes. Bull. Georgian Acad. Sci., 169(2002),26-29 .

[B_9] V. Baladze, On ARU-resolutions of uniform spaces, Georgian Math. J., 10 (2003), 201-207.

[B_{10}] V.Baladze, Fiber shape theory, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 132(2003), 1-70.

[B_{11}] V. Baladze, Characterization of precompact shape and homology properties of remainders.Topology Appl., 142 (2004), 73-88.

[B_{12}] V.Baladze, On the spectral (co)homology exact sequences of maps, Georgian Math. J., 19(2012), 1-12.

[B_{13}] V.Baladze, The (co)shape and (co) homological properties of continuous maps, Math. Vestnik, Belgrad, 66 (2014), 235-247.

[B-Tu_1] V.Baladze and L.Turmanidze, On uniform shape theory with precompact supports, Proc. of A. Razmadze Math. Inst., 127(2001), 63-75.

[B-Tu_2] V.Baladze and L.Turmanidze, Čech's type functors and completions of spaces, 165 (2014), 1-12

[Ba] B.J. Ball, Alternative approaches to proper shape theory. Academic Press, New York (1975),1-27.

[Ba-Sh] B. J. Ball and R. B. Sher, A theory of proper shape for locally compact metricspaces, Fund.Math., 8(1974), 163-192.

[Bat] M.A. Batanin, Categorical strong shape theory, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Caté-goriques, 38(1997),3–65.

[Bau] F. W. Bauer, A shape theory with singular homology, Pac. J. Math.,64(1976), 25–64.

[Bo_1] K. Borsuk, Theory of Retracts, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1967.

[Bo_2] K. Borsuk, Concerning homotopy properties of compacta, Fund. Math.62(1968), 223-254.

[Bo_3] K. Borsuk, Concerning the notion of the shape of compacta,in: Proc.Inter-nat. Symp. Topology and its Appl. Astronom., Beograd, (1969), 98-104.

[Bo_4] K. Borsuk, Theory of Shape, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.

[By-Te_1] A.Bykov and M.Texis, Equivariant fibrant spaces, Glasnik Mat., 40(2005), 323-331.

[By-Te_2] A. Bykov and M. Texis, Equivariant strong shape, Topology Appl., 154(2007), 2026-2039.

[C_1] F.W. Cathey, Strong shape theory, Ph.D. Thesis, University of Washington 1979.

[C_2] F.W. Cathey, Strong shape theory, Lecture Notes in Math., Springer, 870(1981), 215-238.

[Š] A. Šostak, Shape equivalence in compact classes, Dokl.Akad. Nauk SSSR, 214 (1974),67-70.

[$Č_1$] Z. Čerin, Proper shape theory, Acta Sci. Math., 59 (1994), 679-711.

[$Č_2$] Z.Čerin, Fiberwise shape theory, Collect. Math., 45(1994), 101–119.

[$Č_3$] Z. Čerin, Equivariant shape theory. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 117 (1995), 303-320.

[Ca-H] A. Calder and H. M. Hasting, Realizing strong shape equivalences, J. Pure Appl. Algebra, 20(1981), 129-156.

[Ch_1] A. Chigogidze, The theory of n-shapes, Uspekhi Mat. Nauk 44:5 (1989), 117-140.

[Ch_2] A. Chigogidze, n-shapes and n-cohomotopy groups of compacta, Mat. Sb. 180 (1989), 322-335.

[Ch_3] A. Chigogidze, inverse Spectra, North-Holland Math. Library 53, Elsevier Sci. Pub!’B.Y., Amsterdam,1996.

[Cl-Mo] M. Clapp and L. Montejano, Parametrized shape theory, Glasnik Mat.,40(1985), 215-241.

[Co-P] J. M. Cordier and T. Porter, Shape Theory: Categorical Methods of Approximation, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2008.

[Cr-J] M.Crabb and I.James, Fibrewise Homotopy Theory, Springer, 1998.

[D] M.Dadarlat, Shape theory and asymptotic morphisms for C^*-algebras. Duke Math. J.,73(1994), 687-711.

[Do_1] D. Doičinov, On the uniform shape of metric spaces, Soviet Math. Dokl., 17 (1976), 86-89.

[Do_2] D. Doičinov, The uniform shape, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys., 25 (1977), 977-980.

[Do_3] D. Doičinov, Uniform shape and uniform tech homology and cohomology groups for metric spaces, Fund. Math., 102 (1979), 209-218.

[Dol_1] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Dol_2] A. Dold, The fixed index of fibre-preserving maps. Invent. Math., 25(1974), 281-298

[Dr] A. N. Dranishnikov, Absolute extensors in dimension n and n-sof mappings. (Russian)Uspekhi Mat. Nauk, 19(1984), 55-95.

[Dy-N_1] J. Dydak and S. Nowak, Strong shape for topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 323(1991), 765-796.

[Dy-N_2] J. Dydak and S. Nowak, Function space and shape theories, Fund. Math., 171(2002), 117-154.

[Dy-S] J. Dydak and J. Segal, Strong shape theory, Dissertations Math., PWN, Warsaw,192(1981),1–42.

[E-A] D. A. Edvards and P. T. Mc. Auley, The shape of map. Fund. Math., 56(1977),195–210.

[E-H] D. Edwards and H. Hastings, Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[En] R. Engelking, General Topology, PWN, Warszawa, 1977.

[F_1] S. Ferry, A stable converse to the Vietoris-Smale theorem with applications to shape theory, Trans. Amer. Math. Soc., 261(1980), 369-386.

[F_2] S. Ferry, Homotopy, simple homotopy and compacta, Topology, 19(1980), 101-110.

[Fo] R. H. Fox, On shape, Fund. Math., 74 (1972), 47–71.

[G_1] P. S. Gevorgyan, Free equivariant shapes. Sixteenth Summer Conference on Topology and its Applications, (2001), 18–20.

[G_2] P. S. Gevorgyan, Generalized shape theory and movability of continuous transformation groups, Dissertation, MSU, 2001.

[G_3] P. S. Gevorgyan, Yu.M. Smirnov's general equivariant shape theory, Topology and its Applications, 160(2013), 1232-1236.

[H] H. M. Hastings, Shape theory and dynamical systems, In The structure of attractors in dynamical systems, Lecture Notes in Math., 668(1978), 150-160.

[Hu] S. T. Hu, Theory of Retracts, Wayne St. Univ. Press, Detroit, 1965.

[I-S] Y.Iwamoto and K. Sakai, Strong n-shape theory, Topology and its Applications, Topology and its Applications, 122 (2002), 253–267.

[J_1] I. M. James, General Topology and Homotopy Theory, Springer, 1984.

[J_2] I. M. James, Fibrewise Topology. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1989.

[K_1] H. Kato, Fiber shape categories, Tsukuba J. Math., 5(1981), 247-265.

[K_2] H.Kato, Shape fibrations and fiber shape equivalences I, Tsukuba J. Math.,5(1981), 223-235.

[K_3] H.Kato, Shape fibrations and fiber shape equivalences II,ibid., (1995),237-246.

[K_4] H.Kato, Fiber shape categories,Tsukuba J. Math., 9(1985),247-265.

[Ki] Nguyen Anh Kiet, Uniform fundamental classification of complete metric spaces and uniformly continuous mappings Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys., 23 (1975),55-59.

[Ko-O] Y. Kodama and J. Ono, On fine shape theory, Fund. Math., 105 (1979),29-39.

[L_1] T. Lisica, On the exactness of the spectral homotopy group sequence in shape theory, Soviet. Math. Dok., 18 (1977), 1186-1190.

[L_2] T. Lisica, Cotelescopes and the theorem of Kuratowsky-Dugundji in shape theory, Soviet. Math. Dokl., 5(1982), 1064-1068.

[L_3] T. Lisica, Strong shape theory and the Steenrod-Sitnikov homology. (Russian) Sibirsk. Mat. Ž.,24 (1983)81-99.

[L_4] Ju.T. Lisica, Strong shape theory and multivalued maps, Glasnik Mat., 18(1983), 371-382.

[L-M] J.T. Lisica, S. Mardešic´, Coherent prohomotopy and strong shape theory, Glasnik Mat., 19(1984), 335–399.

[M_1] S. Mardešic´, Shapes of topological spaces. General Topology Appl., 3 (1973), 265-282.

[M_2] S. Mardešic´, Resolutions of spaces are strong expansions, Publication D'Institut, Mat., 49 (1991), 179-188.

[M_3] S. Mardešic´, Strong Shape and Homology, Springer, 2000.

[Mi_1] T. Miyata, Uniform shape theory, Glas. Mat. Ser., 29(1994), 123-168.

[Mi_2] T. Miyata, Homology, cohomology and uniform shape, Glasnik Mat.,30(1995), 85-109.

[Mi-S] T. Miyata and J. Segal, Shape and uniform properties of hyperspaces of noncompact spaces,Glasnik Matematicki, 32 (1997), 99-124.

[Mi-W] T. Miyata and T. Watanabe, Approximate resolutions of uniform spaces, Topology Appl.,113(2001), 211-241.

[Mim] Z. Miminoshvili, On a strong spectral shape theory (Russian), Trudy Tbilissk. Mat. Inst. AkadNauk Gruzin. SSR, 68(1982), 79–102.

[Mo-R] R.J.Morelia and L.R.Rubin, The existence of n-shape theory for arbitrary compacta, Glasnik.Math., 33(1998),123-132.

[Mor] K. Morita, On shapes of topological spaces. Fund. Math., 86 (1975), 251-259.

[M-S_1] S. Mardešic and J. Segal, Shapes of compacta and ANR-systems, Fund. Math. 72 (1971), 41-59.

[M-S_2] S. Mardešic and J. Segal, Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes,Fund. Math., 72 (1971) 61-68.

[M-S_3] S. Mardešic and J. Segal, Shape Theory, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[M-Š] S. Mardešic and A. Šostak, On the homotopy type of ANR's for p-paracompacta, Bull. Acad.Polon. Sei. Ser. Sei. Math. Astronom. Phys., 27 (1979), 803-808.

[Md] L. D. Mdzinarishvili, Application of the shape theory in the characterization of exact homology theories and the strong shape homotopic theory. Lecture Notes in Mathematics, Shape Theory and Geometric Topology, 870 (1981) 253-262

[N-S] G.M.Nepomniachy and Ju. M.Smirnov, On retraction of mappings. (Russian) Chechoslovak Math. J., 29 (1979), 366-377.

[Nh] Nguen To Nho, Shape of metric space in the category of metric space and uniformly of continuous maps, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys., (27)1979, 929-934.

[Po] M. M. Postnikov, Lectures on Algebraic Topology, Nauka, Moscow, 1984.

[Q] J.B.Quigley, An exact sequence from the n-th to (n-1)-th fundamental group, Fundam. Math.,76(1972),181-196.

[Sa] K. Sakai, Proper n-shape category, Glasnik Matematicki, 33(1998), 287-297.

[Sm_1] Yu.M. Smirnov, Shape theory and continuous transformations groups, Uspekhi Mat. Nauk, 34 (1979),119-123.

[Sm_2] Yu. M. Smirnov, Equivariant shapes, Serdika, 10 (1984)223-228.

[Sm_3] Yu. M. Smirnov, Shape theory for G-pairs, Uspekhi Mat. Nauk, 40(1985),151-165.

[Sp] E.H. Spanier, Algebraic Topology. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics,1966.

[St] L. Stramaccia, On the definition of the strong shape category. Glassnik math., 32(1997), 141-151.

[U] G.S. Ungar, ANR’s and NES’s in the category of mappings of metric spaces. Fund. Math., 95 (1977), 111-127.

[W] T.Watanabe, Approximative shape I, Tsukuba J.Math., 11(1987), 17-59.

[Y_1] T. Yagasaki, Movability of maps and shape fibrations. II, Tsukuba J. Math., 9(1985), 279-287.

[Y_2] T. Yagasaki, Fiber shape theory, Tsukuba J. Math., 9(1985), 261-277.

[Y_3] T. Yagasaki, Movability of maps and shape fibrations, Glas. Mat., Ser., 21(1986), pp. 153-177.

[Y_4] T. Yagasaki, Fiber shape theory, shape fibrations and movability of maps, Lecture Notes in Math. 1283, Springer, Berlin, (1987), 240–252.